المادّة: رياضيات
المستوى: 2 ت إ

التوقيت: 2ساعة
التاريخ: 2023/05/26

اختبار الفصل الثالث

التمرين الأول: (6 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرّفة بحدّها الأوّل $u_0=1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$

1) أحسب الحدود u_1 , u_2 , u_3. ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n).

2) بفرض أنّ: $u_n \geq -2$ ، جد اتجاه تغير المتتالية $(\ _n)$.

3) لتكن (v_n) متتالية معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n+2$

أ) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين v_0 وأساسها q.

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=v_0+v_1+...+v_n$

د) استنتج بدلالة n المجموع : $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

التمرين الثاني: (6 نقاط)

يتكون هذا التمرين من جزئين منفصلين:

الجزء الأول:

(u_n) متتالية حسابية معرّفة بحدّها الثاني $u_1=3$ وبمجموع حدودها الأربعة الأولى: $u_0+u_1+u_2+u_3=22$

1) عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأوّل u_0.

2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n، ثم عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n حيث: $u_n \geq 2022$

3) أحسب بدلالة n المجموع: $S_n=u_1+u_2+...+u_n$

4) عيّن قيمة n حيث: $S_n=1974$

الجزء الثاني:

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة معرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأوّل $v_0=18$ والعلاقة: $v_0+v_1+v_2=38$

1) بيّن أنّ أساس المتتالية (v_n) هو $q=\frac{2}{3}$.

2) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n.

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n).

4) نضع: $S_n=v_0+v_1+...+v_{n-1}$

– أحسب S_n بدلالة n.

التمرين الثالث: (8 نقاط)

نعتبر الدّالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+5x+10}{x+2}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}-2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-2} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيًا.

2) أ- عيّن الأعداد الحقيقة a، b، c حيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$

ب- بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $y=x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحني (C).

جـ- أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

3) أ- بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-2\}$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{x^2+4x}{(x+2)^2}$

ب- أدرس اتجاه تغير الدّالة f على مجالي مجموعة تعريفها ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النّقطة ذات الفاصلة 2.

5) بيّن أنّ النقطة $\Omega(-2;1)$ هي مركز تناظر للمنحني (C).

6) أنشئ المستقيم (Δ) و المنحني (C).

7) نعتبر الدالة ■ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{x^2+5|x|+10}{|x|+■}$ و (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ- بيّن أنّ ■ دالة زوجية.

ب- اشرح كيفية انشاء المنحني (C_g) اعتمادا على المنحني (C) ثم أنشئه.

تصحيح اختبار الفصل الثالث

حل التمرين الأول:

1) حساب الحدود:

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 1 = \frac{1}{2}(1) - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{5}{4}$$

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{5}{4}\right) - 1 = -\frac{13}{8}$$

نخمن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما لأن:

$$u_0 > u_1 > u_2 > u_3$$

2) دراسة اتجاه التغير:

$$u_{n+1} \quad u_n = \frac{1}{2}u_n \quad 1 - u_n = \frac{-u_n - 2}{2}$$

لدينا $u_n \geq -2$ وبالتالي $\frac{-u_n - \blacksquare}{2} \leq 0$

إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

3) اثبات أن (v_n) هندسية:

لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} + 2$

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}v_n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 3$

4) عبارة v_n بدلالة n: $v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

عبارة u_n بدلالة n: $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$

5) حساب المجموع S_n: $S_n = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$

6) استنتاج المجموع S'_n: $S'_n = 6\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - 2n - 2$

حل التمرين الثاني:

1) حساب الأساس:

$$u_1 - r + u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r = 22$$

$12 + 2r = 22$ ومنه $r = 5$ و $u_0 = -2$

2) عبارة u_n بدلالة n: $u_n = 5n - 2$

أصغر قيمة للعدد الطبيعي n:

$u_n \geq 2022$ أي $5n - 2 \geq 2022$ ومنه $n \geq 404.8$

وبالتالي: $n = 405$

3) حساب المجموع S_n: $s_n = \frac{n(5n+1)}{2}$

4) ايجاد قيمة n بحيث $S_n = 1974$

$\frac{n(5n+1)}{2} = 1974$ أي $5n^2 + n = 3948$

ومنه $5\ ^2 + n - 3948 = 0$ وبالتالي $n = 28$

ايجاد الأساس:

$$18 + 18q + 18q^2 = 38$$

أي $18q^2 + 18q - 20 = 0$ إذن $q = \frac{2}{3}$

عبارة v_n بدلالة n: $v_n = 18\left(\frac{2}{3}\right)^n$

اتجاه التغير:

بما أن $q = \frac{2}{3} < 1$ و $v_0 = 18 > 0$ اذن (v_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

حساب المجموع S_n: $S_n = 54\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

حل التمرين الثالث:

1) النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} f(x) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to -2 \\ <}} f(x) = -\infty$$

$x = -2$ مستقيم مقارب عمودي.

2) تعيين الثوابت: بعد توحيد المقامات والمطابقة نجد $a = 1$ ، $b = 3$ ، $c = 4$

3) $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-y = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{4}{x+2} = 0$

4) <u>دراسة الوضعية:</u>

$x \in]-\infty;-2[$ (C) يقع تحت (Δ).

$x \in]-2;+\infty[$ (C) يقع فوق (Δ).

5) <u>دراسة اتجاه التغير:</u>

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

6) <u>معادلة المماس:</u>

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$y = f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$y = \frac{3}{4}(x-2)+6$$

$$y = \frac{3}{4}x+\frac{9}{2}$$

7) <u>مركز تناظر:</u>

$$f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$$

$$f(-4-x)+f(x)=2$$

$$f(-4-x)+f(x)=-4-x+3+\frac{4}{-x-2}+x+3+\frac{4}{x+2}$$

$$f(-4-x)+f(x)=2$$