

الفرض الأول للثلاثي الثالث في مادة الرياضيات (الأستاذ: مراحي لزهر)

التمرين الأول (أ):

$ABCD$ مربع طول حرفه a و مركزه O .

النقطة I هي منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و النقطة J هي منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

1 - أنشئ شكلا مناسباً.

2 - أحسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما a كلا من الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AJ}$ ، $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OI}$ ، $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{BO}$

التمرين الأول (ب):

ABC مثلث قائم في A حيث $AB = 2\alpha$ و $AC = \alpha$

النقطة D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة A و النقطة K معرفة كما يلي: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$

1 - أنشئ شكلا مناسباً ثم أحسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α ، الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

2 - أثبت أن المستقيمان (BD) و (CK) متعامدان.

التمرين الثاني:

المستوي مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. لتكن النقطتان: $A(-2; 3)$ و $B(4; -1)$ من المستوي.

1 - أكتب معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي قطرها $[AB]$

2 - أكتب معادلة ديكارتية لمماس الدائرة (C) عند النقطة A .

التمرين الثالث:

1 - إذا علمت أن: $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ أحسب: $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

2 - استنتج كلا من $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ و $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ ثم $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

3 - حل في المجال $[0; 2\pi]$ المعادلة: $\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

ملاحظة هامة: اختر واحدا فقط من بين التمرينين الأول (أ) و الأول (ب)

العلامة		عناصر الإجابة
مجموع	مجزأة	
08		التمرين الأول(أ): (08 نقاط)
	02	1 - إنشاء شكل مناسب:
	01,5	II - حساب الجداءات السلمية: $\vec{AI} \cdot \vec{AJ} = AI \times AB = \frac{a}{2} \times a = \frac{a^2}{2}$
	01,5	$\vec{AO} \cdot \vec{OI} = AO \times OI \times \cos(\vec{AO}, \vec{OI}) = AO \times OI \times \cos(\vec{OC}, \vec{OI}) = a \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{a}{2} \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{a^2}{4}$
	01,5 $\vec{IJ} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2}(a^2 + a^2) = a^2$
	01,5 $\vec{IJ} \cdot \vec{BO} = IJ \times BO \times \cos(\vec{IJ}, \vec{BO}) = \frac{AC}{2} \times \frac{BD}{2} \times \cos(\vec{AC}, \vec{BD}) = 0$
		التمرين الأول(ب): (08 نقاط)
	02	1- إنشاء شكل مناسب:
	02	حساب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$
	02 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = -\vec{BA} \cdot \vec{BC} = -BA^2 = -4a^2$
	2- إثبات أن المستقيمان (BD) و (CK) متعامدان:	
02 معناه: $(\vec{AD} + \vec{DB}) \cdot (\vec{BK} + \vec{KC}) = -4a^2$	
	معناه: $\vec{AD} \cdot \vec{BK} + \vec{AD} \cdot \vec{KC} + \vec{DB} \cdot \vec{BK} + \vec{DB} \cdot \vec{KC} = -4a^2$	
	معناه: $0 - a \times a - 2a \times \frac{3}{4}(2a) + \vec{DB} \cdot \vec{KC} = -4a^2$	
	ومنه: $\vec{DB} \cdot \vec{KC} = 0$ إذن $a^2 - 3a^2 + \vec{DB} \cdot \vec{KC} = -4a^2$	
02	و بالتالي: $(DB) \perp (CK)$	
	التمرين الثاني: (06 نقاط)	
	1- أكتب معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي قطرها [AB]	
01 معناه $M \in (C) \Rightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$	
01 $(x+2)(x-4) + (y-3)(y+1) = 0$	
01 $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$	
	2- كتابة معادلة مماس الدائرة (C) :	
01 هذا المماس (T) هو مستقيم يشمل النقطة A و \vec{AB} شعاع ناظمي له	

01 $6(x+2)+(-4)(y-3)=0$ أي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ معناه: $M(x; y) \in (T)$

01 و منه: $(T): 6x - 4y + 24 = 0$

التمرين الثالث: (06 نقاط)

1- حساب $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

$$\frac{2\pi}{5} \in [0; \pi] \text{ لأن } \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) > 0 \text{ مع } \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$$

02 إذن: $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$

2- استنتاج كلا من $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ و $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ ثم $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ و $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

06 0,5

$$\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \sin\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

0,5

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

0,5

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

0,5

3- حل في المجال $[0; 2\pi]$ المعادلة: $\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$

01 $\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

01 إذن: $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{5} \\ \text{و} \\ x = 2\pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{7\pi}{5} \end{array} \right.$

انتهى نص الإجابة بعون من الله وفضله