

الفرض الأول للفصل الثاني

X	-4	-3	1	3	4
$P(X = x)$	0.25	a	b	0.05	0.25

I. ليكن X المتغير العشوائي المحدد بالجدول التالي:

- جد a و b إذا علمت أن: $E(X) = 0$

II. يحتوي كيس على خمس كرات حمراء وثلاث كرات

خضراء و كرتين بيضاء غير متمايضة عند اللمس.

نسحب عشوائياً كرتين على التوالي دون إرجاع و نعتبر أن كل الكرات لها نفس الاحتمال .

(1) مثل الوضعية بواسطة شجرة الاحتمالات .

(2) أحسب احتمال الحصول على :

(أ) A "كرتين من نفس اللون" .

(ب) B "كرة خضراء في السحب الأول" .

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين بيضاء.

(أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله .

(ب) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$.

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. أحسب النهايات للدالة f عند أطراف مجموعة التعريف D_f ثم فسر النتائج هندسياً.

2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x - 1}$

3. بين أن : $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4. أثبت أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

5. بين أن $f(2 - x) + f(x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟

6. أنشئ (D) و (C_f) .

مستأفراً للمحاولة: فقلوب

تصحيح الفرض الأول للفصل الثاني

(2) حساب احتمال:

(أ) A "كرتين من نفس اللون"

الحدث A هو RR أو BB أو VV :

$$P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{28}{90}$$

(ب) B "كرة خضراء في السحب الأول"

الحدث B هو VR أو VB أو VV :

$$P(B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{27}{90}$$

(3) (أ) تعيين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و

تعريف قانون احتماله.

المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين بيضاء إذن

يمكن أن نسحب كرتين أو كرة واحدة أو لا نسحب أي كرة بيضاء.

(أ) القيم التي يأخذها X هي $2, 1, 0$

قانون احتمال X لدينا:

$$P(X=0) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{56}{90}$$

$$P(X=1) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{32}{90}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{90}$$

نلخص النتائج في الجدول التالي:

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{56}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{2}{90}$

(ب) حساب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري

للمتغير العشوائي $\sigma(X)$

$$E(X) = 0 \times \frac{56}{90} + 1 \times \frac{32}{90} + 2 \times \frac{2}{90}$$

$$E(X) = 0.4$$

I. إيجاد a و b :

نعلم أن $\sum_{i=1}^5 P_i = 1$ أي: $0.25 + a + b + 0.05 + 0.25 = 1$

$$a + b = 0.45 \dots \dots \dots (1)$$

ومنه:

وكذلك $E(X) = 0$ أي:

$$(-4 \times 0.25) + (-3 \times a) + (b \times 1) + (3 \times 0.05) + (4 \times 0.25) = 0$$

$$-3a + b = -0.15 \dots \dots \dots (2)$$

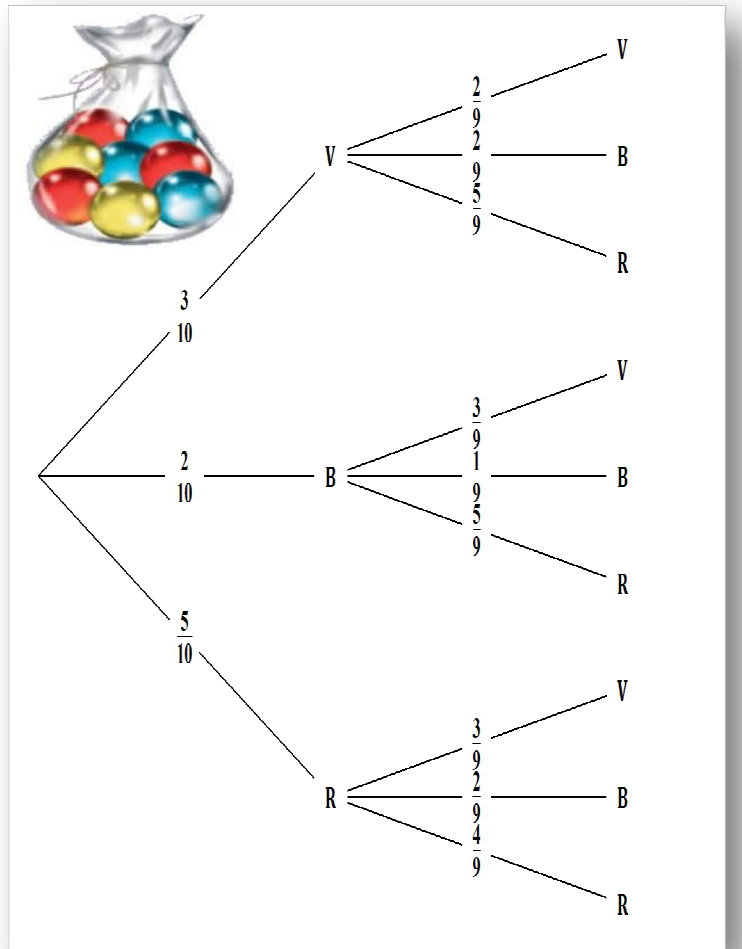
من (1) و (2) نجد: $a = 0.15$ و $b = 0.30$

II

شجرة الاحتمالات: نرسم:

B للكرة البيضاء، V للكرة الخضراء، R للكرة الحمراء.

(1) شجرة الاحتمالات:



الانحراف المعياري:

أولا نحسب التباين $V(X)$:

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 (x_i - E(X))^2 p_i$$

$$V(X) = (0 - 0.4)^2 \frac{56}{90} + (1 - 0.4)^2 \frac{32}{90} + (2 - 0.4)^2 \frac{2}{90}$$

$$V(X) \approx 0.284$$

إذن الانحراف المعياري هو:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.284} = 0.53$$

$$\sigma(X) \approx 0.53$$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - 1 \times (x^2 - 2x + 5)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 4x + 2 - x^2 + 2x - 5}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة البسط $x^2 - 2x - 3$ ثلاثي حدود من الدرجة الثانية مميزه $\Delta = 16$ يقبل جذرين

$$x'' = -1 \text{ و } x' = 3$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	○	+

الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]-\infty, -1[$ و $]3, +\infty[$ ومتناقصة تماما على المجالين $]1, 3[$ و $]-1, 1[$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$					

Diagram showing the sign of $f'(x)$ in different intervals: $-\infty$ to -1 is positive, -1 to 1 is negative, 1 to 3 is negative, and 3 to $+\infty$ is positive. Arrows indicate the direction of change.

4. إثبات أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب

مائل لـ (C_f) ثم دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x-1} = 0$$

ومنه المستقيم (D) مقارب مائل لـ (C_f) .

دراسة الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D) :

$$f(x) - (x-1) = \frac{4}{x-1}$$

ندرس إشارة الفرق: إشارة الفرق من إشارة $x-1$:

إشارة الفرق من إشارة $x-1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-		+
	(C_f) تحت (D)		(C_f) فوق (D)

1. حساب النهايات:

نهايات الدالة f عند $-\infty$ ، $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

نهايات الدالة f عند 1 بقيم أكبر وأصغر منه:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

التفسير الهندسي:

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الترتيب

معادلته $x = 1$.

2. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$$

$$x - 1 + \frac{4}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1) + 4}{x-1}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 1 + 4}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 5}{x-1} = f(x)$$

3. تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

5. تبين أن $f(2-x) + f(x) = 0$

$$f(2-x) = 2-x-1 + \frac{4}{2-x-1} = -x+1 + \frac{4}{-x+1} = -x+1 - \frac{4}{x-1}$$

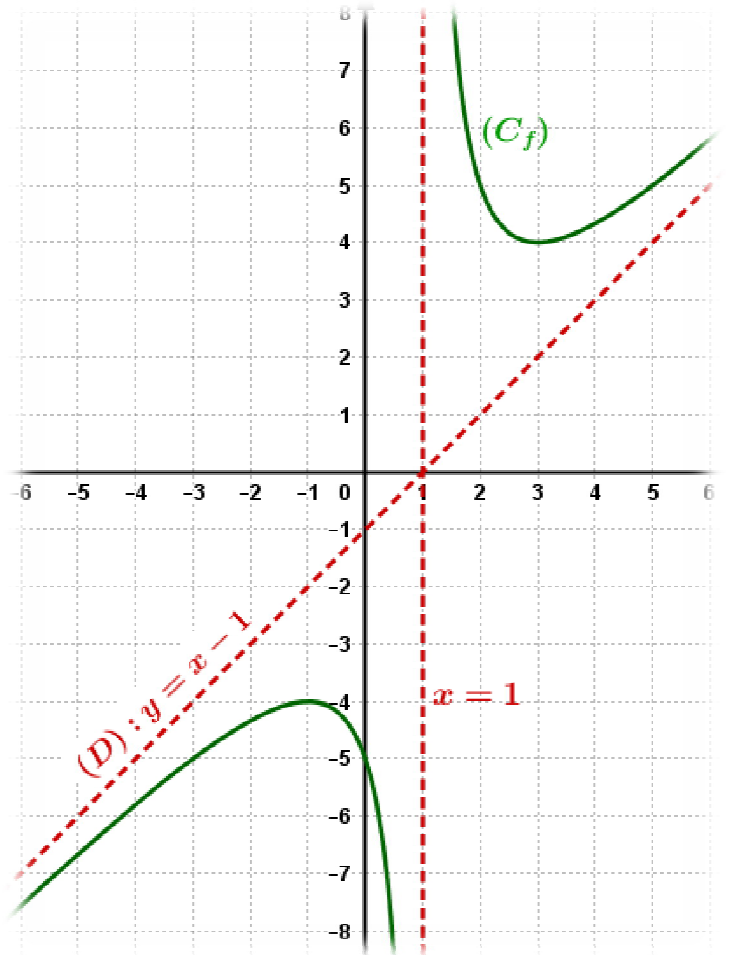
$$f(2-x) + f(x) = -x+1 - \frac{4}{x-1} + x-1 + \frac{4}{x-1} = 0$$

نلاحظ أن:

$$f(2(a)-x) + f(x) = 2 \times b$$
$$f(2(1)-x) + f(x) = 2 \times 0$$

ومنه نستنتج أن النقطة $\Omega(1;0)$ مركز تناظر المنحنى (C_f) .

6. إنشاء (D) و (C_f)



مركز التناظر $\Omega(1;0)$