

اختبار الفصل الثالث

كله أجب بصح أو خطأ مع التبرير:

1. إذا كان $\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ فإن نسبة التحاكي h الذي مركزه I ويحول A إلى D هي $k = 2$.
2. إذا كان $3\vec{BC} = \vec{AC}$ فإن صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته 3 هي A .
3. h تحاكي يرفق بكل نقطة $M(x; y)$ النقطة $M'(x'; y')$ حيث: $\begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases}$ ، إحداثيات النقطة الصامدة هي $\Omega(-1; 3)$.

في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقطتين $A(2; 2)$ ، $B(3; 0)$ والمستقيم $(T): y = x - 2$

1. أكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) محور القطعة $[OA]$.

2. أكتب معادلة ديكارتية للدائرة (C) التي قطرها $[OA]$.

3. بين أن المستقيم (T) مماس للدائرة (C) ثم حدد إحداثيات نقطة التماس E .

4. بين أن النقطة B تقع خارج الدائرة (C) .

5. بين أن $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6$ ثم استنتج قياسا للزاوية \hat{AOB} .

6. أحسب مساحة المثلث AOB .

7. عين مجموعة النقط M التي تحقق: $MO^2 + MA^2 = 8$.

1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{7u_n}{1 + 2u_n}$

أ- أحسب u_1 و u_2 .

ب- بين أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا علمت أن $0 < u_n < 3$.

2. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ: $v_n = \frac{u_n}{3 - u_n}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 7$.

ب- أكتب v_n بدلالة n .

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ ، ماذا تستنتج؟

3. أحسب المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$

(4) تبين أن النقطة B تقع خارج الدائرة (C)

نحسب المسافة $\omega B = \sqrt{5} > r = \sqrt{2}$ إذن B تقع خارج الدائرة (C).

(5) تبين أن: $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 6$

لدينا $\vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{OB} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ إذن $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 3 \times 2 + 2 \times 0 = 6$

كذلك (سنستخرج قوس الزاوية \hat{AOB}):

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OB}\| \cdot \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = 6$$

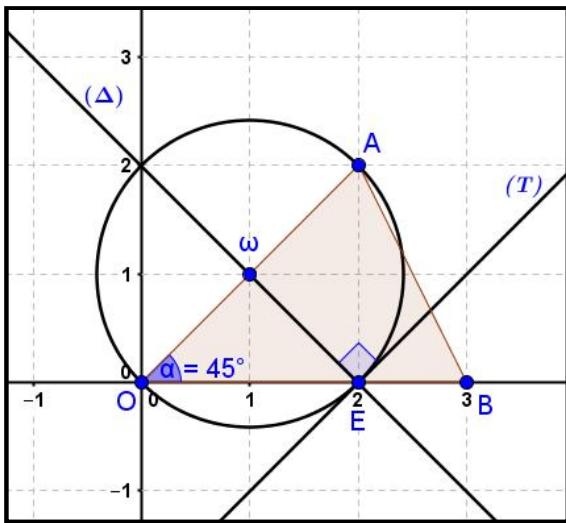
$$\text{إذن: } \cos(\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ومنه: } (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{4}$$

(6) حساب مساحة المثلث AOB:

$$\text{لدينا: } \sin \hat{O} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أي } S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin \hat{O}$$

$$\text{ومنه } S_{AOB} = 3$$



(7) تبين مجموعة النقط M التي تحقق: $MO^2 + MA^2 = 8$

لدينا $\omega(1,1)$ منتصف [OA] إذن حسب مبرهنة المتوسط:

$$2M\omega^2 + \frac{1}{2}OA^2 = 8 \text{ أي } MO^2 + MA^2 = 2M\omega^2 + \frac{1}{2}OA^2$$

$$\text{أي } M\omega = \sqrt{2} \text{ إذن } M\omega^2 = 2 \text{ ومنه } 2M\omega^2 + \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 8$$

وبالتالي فإن مجموعة النقط هي الدائرة التي مركزها النقطة ω و نصف قطرها $\sqrt{2}$ أي هي الدائرة (C).

(1) خطأ: النسبة هي $k = -2$

$$\text{التبرير: } \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AD} = \frac{1}{3}(\vec{AI} + \vec{ID}) = \frac{1}{3}\vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$$

$$\text{أي } \frac{2}{3}\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{ID} \text{ أي } \vec{ID} = -2\vec{IA} \text{ ومنه}$$

(2) صح: صورة B بالتحاكي h الذي مركزه C ونسبته 3 هي النقطة A

$$\text{التبرير: } 3\vec{BC} = \vec{AC} \text{ أي } \vec{CA} = 3\vec{CB}$$

(3) خطأ: النقطة الصامدة هي $\Omega(1; 2)$

$$\text{التبرير: } \begin{cases} x' = -2x + 3 \\ y' = -2y + 6 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = -2x + 3 \\ y = -2y + 6 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

(1) معادلت المستقيم (Δ)

$$\vec{OA} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ شعاع ناظمي إذن: } (2)x + (2)y + c = 0 \text{ (Δ)}$$

المستقيم يشمل منتصف [OA] أي $\omega(1,1)$ إذن نبحث عن قيمة c بما أن $\omega \in (\Delta)$ أي: $2(1) + 2(1) + c = 0 \Rightarrow c = -4$

$$\text{ومنه } (\Delta): x + y - 2 = 0 \text{ أو } (\Delta): 2x + 2y - 4 = 0$$

(2) معادلت الدائرة (C)

$$\text{لدينا المركز } \omega(1,1) \text{ ونصف القطر } \frac{OA}{2} = r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{إذن معادلة الدائرة هي: } (C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

(3) تبين أن (T) مماس لـ (C)

نحسب المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم (T)

$$d(\omega, (T)) = \frac{|-x_0 + y_0 + 2|}{\sqrt{(-1)^2 + (1)^2}} = \frac{|-(1) + 1(1) + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\text{إذن } d(\omega, (T)) = \sqrt{2} = r \text{ ومنه (T) مماس لـ (C)}$$

كذلك (نجد إحداثيات نقطة E أي إيجاد النقطة التقاطع أو التماس)

$$\text{بين (T) و (C) نحل جملة المعادلة: } \begin{cases} y = x - 2 \dots\dots (1) \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\text{بتعويض (1) في (2) نجد: } (x-1)^2 + ((x-2)-1)^2 = 2$$

$$\text{التبسيط نجد: } [2x^2 - 8x + 8 = 0] \text{ نبسط المعادلة نجد } (x-2)^2 = 0$$

$$\text{أو نحل المعادلة بحساب المميز } \Delta = 0 \text{ إذن المعادلة تقبل حل}$$

$$\text{مضاعف } x = 2 \text{ بالتعويض في المعادلة رقم (1) نجد } y = 0 \text{ إذن}$$

$$\text{إحداثيات النقطة } E(2,0)$$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+1}$

$$\text{عدد الحدود} = n + 2 = [(n+1) - 0 + 1]$$

$$S_n = v_0 \times \left(\frac{q^{n+2} - 1}{q - 1} \right) = 2 \left(\frac{7^{n+2} - 1}{7 - 1} \right) = \frac{7^{n+2} - 1}{3}$$



1/1 - حساب u_1 و u_2 .

$$u_1 = \frac{7u_0}{1 + 2u_0} = \frac{7 \times 2}{1 + 2 \times (2)} = \frac{14}{5}$$

$$u_2 = \frac{7u_1}{1 + 2u_1} = \frac{7 \left(\frac{14}{5} \right)}{1 + 2 \left(\frac{14}{5} \right)} = \frac{98}{33}$$

ب- تبين أن: $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{7u_n}{1 + 2u_n} - u_n = \frac{7u_n - (u_n)(1 + 2u_n)}{1 + 2u_n}$$

$$= \frac{7u_n - u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} = \frac{6u_n - 2u_n^2}{1 + 2u_n} = \frac{2u_n(3 - u_n)}{1 + 2u_n}$$

ك- نستنتج (تجاه تغير المتتالية (u_n))

لدينا $0 < u_n < 3$: $2u_n > 0$ و $1 + 2u_n > 0$ لأن $u_n > 0$

و $(3 - u_n) > 0$ لأن $u_n < 3$ إذن $u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على \mathbb{N} .

2/1 - تبين أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3 - u_{n+1}} = \frac{\frac{7u_n}{1 + 2u_n}}{3 - \frac{7u_n}{1 + 2u_n}} = \frac{7u_n}{3(1 + 2u_n) - 7u_n}$$

$$= \frac{7u_n}{1 + 2u_n} = 7 \times \frac{u_n}{3 - u_n} = 7v_n$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = 7$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0}{3 - u_0} = \frac{2}{3 - 2} = 2$$

ب- كتابت (v_n) بدلالة n

$$\text{لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه: } v_n = 2 \times 7^n$$

ج- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty \text{ لأن } q = 7 > 1 \text{ و } v_0 = 2 > 0$$

ك- نستنتج أن المتتالية (v_n) متباعدة.