اختبار الفصل 2 في مادة الرياضيات

120 دقيقة

التمرين الأول

✍ نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1} \end{cases}$ و $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$

❶ احسب u_1 و u_2.

❷ بين أن : $v_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n - 1}$ ثم استنتج أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 و يطلب تعيين حدها الأول v_0.

❸ اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n (لاحظ أنه يمكن كتابة : $v_n = 1 + \dfrac{2}{u_n - 1}$).

❹ احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots\cdots + v_n$.

التمرين الثاني

✍ ABC مثلث ، I نقطة معرفة بالعلاقة : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ و G مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2);(C,-1)\}$

❶ بين أن النقطة I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2)\}$.

❷ أنشئ النقطتين I و G.

❸ عين ثم أنشئ (E_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = 4$.

❹ لتكن K مرجح الجملة $\{(B,2);(C,-3)\}$ ، بين أن المستقيمين (CI) و (AK) متوازيين.

❺ نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ ، لتكن النقط $A(1,2)$ ، $B(2,1)$ ، $C(0,-3)$

◄ عين احداثيي النقطة D مركز ثقل المثلث ABC.

◄ عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}\right\|$.

التمرين الثالث

✍ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ كما يلي : $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

❶ عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{3\}$: $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 3}$.

❷ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

❸ بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عمودي على محور الفواصل يطلب تعيين معادلة له.

❹ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).

❺ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{3\}$: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 8}{(x - 3)^2}$.

❻ عين اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❼ بين أن النقطة $\omega(3;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

❽ ارسم (Δ) و (C_f).

الإجابة النموذجية

حل التمرين الأول

❶ حساب : $u_1=\frac{3u_0-1}{u_0+1}=\frac{3\times3-1}{3+1}=2$ $.u_2=\frac{3u_1-1}{u_1+1}=\frac{3\times2-1}{2+1}=\frac{5}{3}$

❷ تبيان أن : $v_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n-1}$: $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}+1}{u_{n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1}{u_n+1}+1}{\frac{3u_n-1}{u_n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1+u_n+1}{u_{n+1}}}{\frac{3u_n-1-u_n-1}{u_{n+1}}}=\frac{4u_n}{2u_n-2}=\frac{2(2u_n)}{2(u_n-1)}=\frac{2u_n}{u_n-1}$

◄ استنتاج أن (v_n) متتالية حسابية : لدينا $v_{n+1}-v_n=\frac{2u_n}{u_n-1}-\frac{u_n+1}{u_n-1}=\frac{u_n-1}{u_n-1}=1$ ومنه (v_n) حسابية أساسها 1.

◄ تعيين $v_0=\frac{u_0+1}{u_0-1}=\frac{3+1}{3-1}=2$.

❸ كتابة v_n بدلالة n : $v_n=v_0+rn=2+n$

◄ استنتاج u_n بدلالة n : لدينا $v_n=1+\frac{2}{u_n-1}$ أي $u_n=1+\frac{2}{v_n-1}$ اذن $u_n=1+\frac{2}{n+1}$.

❹ حساب المجموع S_n : $S_n=\frac{(n+1)(2+2+n)}{2}=\frac{(n+1)(n+4)}{2}$.

حل التمرين الثاني

❶ تبيان أن النقطة I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2)\}$

لدينا : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ أي $3\times\overrightarrow{AI}=3\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ أي $3\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{AI}-2\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ أي $3\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{AI}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

أي $-\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ و منه $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ اذن I مرجح الجملة $\{(A,1);(B,2)\}$.

❸ تعيين ثم انشاء (E) : لدينا : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|=4$ أي $2MG=4$ أي $MG=2$

ومنه مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها G ونصف قطرها 2.

❹ تبيان أن المستقيمين (CI) و (AK) متوازيين.

◄ لدينا : K مرجح الجملة $\{(B,2);(C,-3)\}$ أي $2\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$ أي $2\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IB}\right)-3\left(\overrightarrow{KI}+\overrightarrow{IC}\right)=\vec{0}$

أي $2\overrightarrow{KI}+2\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{KI}-3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ أي $-\overrightarrow{KI}+2\overrightarrow{IB}-3\overrightarrow{CI}=\vec{0}\cdots(1)$

◄ و لدينا أيضا : $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ أي $\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KA}\right)+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ أي $-\overrightarrow{KI}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{AK}=\vec{0}\cdots(2)$

نطرح (2) من (1) نجد : $3\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{AK}=\vec{0}$ ومنه $\overrightarrow{AK}=-3\overrightarrow{CI}$ اذن (CI) و (AK) متوازيين.

❺ تعيين احداثيي النقطة D

$$\begin{cases}x_D=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ y_D=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}$$ أي $$\begin{cases}x_D=\frac{0+2+1}{3}\\ y_D=\frac{2+1-3}{3}\end{cases}$$ اذن $D(1;0)$.

تعيين (Γ) : لدينا : $\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}\right\|$ أي $3MD=3MA$ أي $MD=MA$

ومنه مجموعة النقط (Γ) هي المستقيم المحوري للقطعة $[AD]$.

حل التمرين الثالث

❶ تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$ أي $f(x)=ax+b+\frac{(ax+b)(x-3)+c}{x-3}$ أي $f(x)=ax+b+\frac{ax^2+(-3a+b)x+-3b+c}{x-3}$

بالمطابقة نجد : $a=1$ ، $-3a+b=-5$ ، $-3b+c=7$ ومنه $a=1$ ، $b=-2$ ، $c=1$.

❷ حساب النهايات

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} \frac{\overbrace{x^2-5x+7}^{1}}{\underbrace{x-3}_{0^-}} = -\infty \qquad \lim_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} \frac{\overbrace{x^2-5x+7}^{1}}{\underbrace{x-3}_{0^+}} = +\infty$$

❸ معادلة المستقيم المقارب العمودي على محور الفواصل : $x = 3$.

❹ تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f)

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{1}{x-3} = 0 = \lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[x - 2 + \frac{1}{x-3} - (x-2)\right] = \lim\limits_{|x|\to+\infty}[f(x) - y]$ ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لــ (C_f).

◄ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ) .

ندرس اشارة الفرق $f(x) - y = \frac{1}{x-3}$ ومنه : (C_f) فوق (Δ) في المجال $]3;+\infty[$ ، (C_f) تحت (Δ) في المجال $]-\infty;3[$

❺ تبيان أن : $f'(x) = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-3) - (1)(x^2-5x+7)}{(x-3)^2} = \frac{2x^2-6x-5x+15-x^2+5x-7}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x-8}{(x-3)^2}$$

❻ تعيين اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها.

ندرس اشارة المشتقة : نحل المعادلة $x^2 - 6x - 8 = 0$ ، نحسب $\Delta = 4$ ومنه $x = 2$ أو $x = 4$ اذن :

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجالين : $]2;3[$ و $]3;4]$ و متزايدة تماما على المجالين : $]-\infty;2]$ و $[4;+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

❼ اثبات أن $\omega(3;1)$ مركز تناظر لـ (C_f)

نبين أن : $f(6-x) + f(x) = 2$ لدينا : $2 = \frac{1}{x-3} + x - 2 + \frac{1}{(6-x)-3} + (6-x) - 2 = f(6-x) + f(x)$

ومنه ω مركز تناظر لــ (C_f).

❽ رسم (Δ) و (C_f):