المادّة: الرياضيات — التاريخ: 2019/03/05
المستوى: الثانية ثانوي — المدة: 02 سا

اختبار الفصل الثاني

تمرين 01: (05,5 ن)

1) لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;3),(B;3),\ (C;-2)\ ,(D;-2)\}$.

أ. نسمي I منتصف $[AB]$, بيّن أنّ I مرجح الجملة $\{(A;3),(B;3)\}$.

ب. نسمي J منتصف $[CD]$, بيّن أنّ J مرجح الجملة $\{(C;-2),\ (D;-2)\}$.

ت. استنتج أنّ G مرجح النقطتين I وJ.

2) نسمي K مرجح $\{(A;3),\ (B;3)\ ,(C;-2)\}$. بيّن أنّ المستقيمين (KD) و (IJ) متقاطعان في النقطة G.

3) بيّن أنّ الجملة $\{(A;1),(B;-2),\ (C;1)\}$ لا تقبل مرجح. ثم استنتج أنّ الشعاع: $\vec{V}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$ يمكن أن يكتب على الشكل $\vec{V}=2\overrightarrow{CI}$.

أ. عيّن γ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|=\|\vec{V}\|$.

ب. عيّن Δ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\|$

تمرين 02: (04,5 ن) "الجزءان الأول و الثاني مستقلان عن بعضهما"

الجزء الأول : 1. هل العددان الحقيقيان $\frac{-117\pi}{5}$ و $\frac{533\pi}{5}$ يمثلان قيسا رئيسيا لنفس الزاوية؟

2. بسط ما يلي : أ. $A(x)=cos(3\pi+x)+\sin(11\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)$.

ب. $B(x)=cos\left(\frac{8\pi}{7}+x\right)+\sin\left(\frac{8\pi}{7}+x\right)-\cos\left(\frac{6\pi}{7}-x\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{7}-x\right)$.

الجزء الثاني : نعتبر المعادلة (E_1) : $2\,cos(4x)-1=0$.

1) أوجد حلول هذه المعادلة على المجال $]-\pi\ ;\ \pi]$.

2) من أجل كل عدد حقيقي x برهن المساواة التالية: $cos(4x)=8\,cos^4x-8\,cos^2x+1$.

تعطى : $\cos 2\alpha=2(\cos\alpha)^2-1$.

أ. نعتبر المعادلة (E_2): $16\,cos^4x-16\,cos^2x+1=0$.

ب. استنتج أنّ للمعادلتين (E_1) و (E_2) نفس الحلول.

تمرين 03: (10 ن)

I. g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 + 3x + 4$.

أ. أحسب $g(-1)$ ثم استنتج تحليلا لـ $g(x)$.

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3+x^2-1}{x^2+1}$.

وليكن (C_f) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

2) أحسب مشتقة الدالة f ثم بيّن أنه من أجل كل x من D_f لدينا: $f'(x) = \frac{x(x+1)(x^2-x+4)}{(x^2+1)^2}$.

3) استنتج تغيرات الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) أوجد الأعداد الحقيقية d, c, b, a بحيث : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+1}$.

5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته : $y = x + 1$.

6) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).

7) أرسم كل من (Δ) و المنحنى (C_f).

8) ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $x^3 + (1-m)x^2 - 1 - m = 0$.

9) نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ g: $g(x) = f(-x)$.

أ. بيّن كيف يمكن استنتاج (C_g) انطلاقا من منحني (C_f).

ب. أرسم (C_g) منحني الدالة g في نفس المعلم السابق.

وفقكم الله

تمرين 1

$A \quad I \quad B \qquad C \quad J \quad D$

$\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0} \Rightarrow I \{(A,1);(B,1)\}$ (0,25)

ومنه I مرجح $\{(A,3),(B,3)\}$ (0,25)

$\vec{IJ}+\vec{ID}=\vec{0} \Rightarrow J\{(C,1);(D,1)\}$ (0,25)

ومنه J مرجح $\{(C,-2);(D,-2)\}$ (0,25)

$$\underbrace{\underbrace{(A,3)\ (B,3)}_{(I,6)}\ \underbrace{(C,-2)\ (D,-2)}_{(J,-4)}}_{(G,2)}$$ (0,5)

حسب الخاصية التجميعية G مرجح $\{(I,3);(J,-2)\}$

$$\underbrace{\underbrace{\{(A,3);(B,3);(C,-2)}_{(K,4)};(D,-2)\}}_{(G,2)}$$ (0,5)

حسب الخاصية التجميعية G مرجح $\{(K,4);(D,-2)\}$

(0,5)

$G \in (IJ) \Leftrightarrow G$ مرجح $\{(I,3),(J,-2)\}$

(0,5)

$G \in (KD) \Leftrightarrow G$ مرجح $\{(K,4),(D,-2)\}$

ومنه المستقيمان (KD) و (IJ) متقاطعان في النقطة G.

③ $1-2+1=0$ إذن: (0,5) الجملة $\{(A,1)\ (B,-2)\ (C,1)\}$ لا تقبل مرجح

$\vec{V}=\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{MC} = $ (0,5)

$= \vec{IA}+\vec{IB} - 2\vec{IC} = 2\vec{CI}$

$\|3\vec{MA}+3\vec{MB}-2\vec{MC}\| = \|2\vec{CI}\|$ (0,25)

$4MK = 2CI \Rightarrow MK = \frac{CI}{2}$ (0,25)

(γ) هي دائرة مركزها k وشعاعها $\frac{CI}{2}$

$\|3\vec{MA}+3\vec{MB}-2\vec{MC}-2\vec{MD}\| = \|\vec{MA}+\vec{MB}\|$

(0,25) $2MG = 2MI$

(0,5) I مرجح $\{(A,1),(B,1)\}$

(0,25) $MG = MI$

(Δ) هي محور القطعة $[GI]$

تمرين 2 :

$-\frac{117\pi}{5} = -\left(23\pi+\frac{2\pi}{5}\right) = -\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)$

$= -\frac{7\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$ (0,25)

$\frac{533\pi}{5} = 106\pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi}{5}$ (0,25)

نعم يمثلان نفس القيس

(0,25)

$A(x) = \cos(3\pi+x)+\sin(11\pi+x)-\cos(\pi-x)$

$-\sin(\pi-x)$

$A(x) = -\cos x - \sin x + \cos x - \sin x$

$= -2\sin x$ (0,25)

$B(x) = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}+x\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}+x\right)$

$-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}-x\right) \bullet \sin\left(-\left(\frac{\pi}{7}+x\right)\right)$

نضع $\alpha = \frac{\pi}{7}+x$.

$B(x) = \cos(\pi+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)-\cos(\pi-\alpha)$

$-\sin(-\alpha)$

$= -\cos\alpha - \sin\alpha + \cos\alpha + \sin\alpha$

$= 0$

(0,25)

تمرين 1 ①

$\vec{IA}+\vec{IB}=\vec{0} \Rightarrow I\ \{(A,1);(B,1)\}$ (0,25)

ومنه I مرجح $\{(A,3),(B,3)\}$ (0,25)

$\vec{JC}+\vec{JD}=\vec{0} \Rightarrow J\ \{(C,1);(D,1)\}$ (0,25)

ومنه J مرجح $\{(C,-2);(D,-2)\}$ (0,25)

$$\underbrace{\underbrace{(A,3)\ (B,3)}_{(I,6)}\ \underbrace{(C,-2)\ (D,-2)}_{(J,-4)}}_{(G,2)}$$ (0,5)

حسب الخاصية التجميعية G مرجح $\{(I,3);(J,-2)\}$

② $$\underbrace{\underbrace{\{(A,3);(B,3);(C,-2)}_{(K,4)};(D,-2)\}}_{(G,2)}$$ (0,5)

حسب الخاصية التجميعية G مرجح $\{(K,4);(D,-2)\}$ (0,5)

$G\in(IJ) \Leftrightarrow$ G مرجح $\{(I,3),(J,-2)\}$ (0,5)

$G\in(KD) \Leftrightarrow$ G مرجح $\{(K,4),(D,-2)\}$

ومنه المستقيمان (KD) و (IJ) متقاطعان في النقطة G.

③ $1-2+1=0$ إذن: (0,5)

الجملة $\{(A,1)\ (B,-2)\ (C,1)\}$ لا تقبل مرجح

$\vec{V}=\vec{MA}+\vec{MB}-2\vec{MC}$ = (0,5)

$=\vec{IA}+\vec{IB}-2\vec{IC}=2\vec{CI}$

④ $\|3\vec{MA}+3\vec{MB}-2\vec{MC}\|=\|2\vec{CI}\|$ (0,25)

$4MK=2CI \Rightarrow MK=\frac{CI}{2}$ (0,25)

(γ) هي دائرة مركزها K ونصف قطرها $\frac{CI}{2}$

$\|3\vec{MA}+3\vec{MB}-2\vec{MC}-2\vec{MD}\|=\|\vec{MA}+\vec{MB}\|$

$2MG=2MI$ (0,25)

I مرجح $\{(A,1),(B,1)\}$ (0,5)

$MG=MI$ (0,25)

(Δ) هي محور القطعة $[GI]$

تمرين 2

$-\frac{117\pi}{5}=-\left(23\pi+\frac{2\pi}{5}\right)=-\left(\pi+\frac{2\pi}{5}\right)$

$=-\frac{7\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$ (0,25)

$\frac{533\pi}{5}=106\pi+\frac{3\pi}{5}=\frac{3\pi}{5}$ (0,25)

نعم يمثلان نفس القيس (0,25)

$A(x)=\cos(3\pi+x)+\sin(11\pi+x)-\cos(\pi-x)$

$-\sin(\pi-x)$

$A(x)=-\cos x-\sin x+\cos x-\sin x$

$=-2\sin x$ (0,25)

$B(x)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{7}+x\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}+x\right)$

$-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}-x\right)-\sin\left(-\left(\frac{\pi}{7}+x\right)\right)$

نضع $\alpha=\frac{\pi}{7}+x$

$B(x)=\cos(\pi+\alpha)+\sin(\pi+\alpha)-\cos(\pi-\alpha)$

$-\sin(-\alpha)$

$=-\cos\alpha-\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha$

$=0$ (0,25)

$g(x) = (x+1)(x^2 - x + 4)$ (0,5) — تعريف $g(-1)=0$ (0,25)

$x^2 - x + 4 = 0 \longrightarrow \Delta < 0$ (0,25)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(0,5)

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

① (0,5)×2

$$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to \mp\infty} x = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$$

② (0,75)

$$f'(x) = \frac{x\, g(x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x+1)(x^2 - x + 4)}{(x^2+1)^2}$$

③ (0,25)

متزايدة تماما f : $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

متناقصة تماما f (0,25) $x \in]-1, 0[$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(0,5)

④ $a = 1 \quad b = 1 \quad c = -1 \quad d = -2$

$$f(x) = x + 1 + \frac{-x - 2}{x^2 + 1}$$ (1)

(0,25)

⑤ $$\lim_{x \to \mp\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{-x}{x^2} = 0$$

(0,25) $y = x + 1$ م.م مائل بجوار $\mp\infty$

⑥

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$
الوضعية	C_f فوق (Δ)	C_f يقطع (Δ)	C_f تحت (Δ)

(0,75)

⑧ $$x^3 + (1 - m)x^2 - 1 - m = 0$$

$$x^3 + x^2 - 1 = mx^2 + m$$
$$= m(x^2 + 1) \Rightarrow m = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

(0,25)

$2\cos(4x) = 1 \qquad (E_1)$

$\cos(4x) = \frac{1}{2} \iff \cos(4x) = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\begin{cases} 4x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 4x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4} \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{4} \end{cases}$$ (0,5)

$x = -\frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{12}$ (0,5) : $k = 0$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ (0,5) : $k = 1$

$x = \frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{7\pi}{12}$

$x = -\frac{\pi}{12} + \pi$, $x = \frac{\pi}{12} + \pi$ (0,5) : $k = 2$

$x = \frac{11\pi}{12}$, $x = \frac{13\pi}{12}$

$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}$ (0,5) : $k = 3$

$x = \frac{17\pi}{12}$, $x = \frac{19\pi}{12}$

$\cos(4x) = \cos(2(2x))$

$\cos(4x) = \cos(2\alpha) \qquad \alpha = 2x$ نضع

$\cos 2\alpha = 2(\cos\alpha)^2 - 1$

$= 2[\cos 2x]^2 - 1$ (0,5)

$= 2[2(\cos x)^2 - 1]^2 - 1$

$= 2[4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1] - 1$

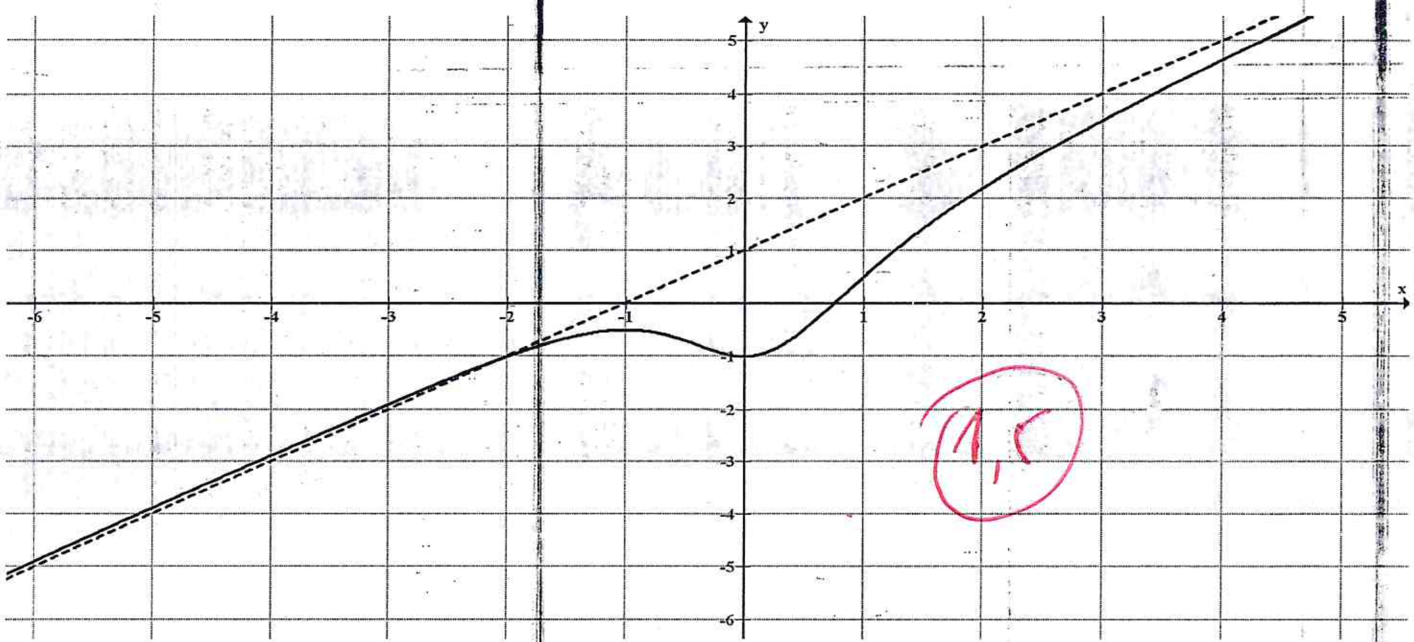
$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

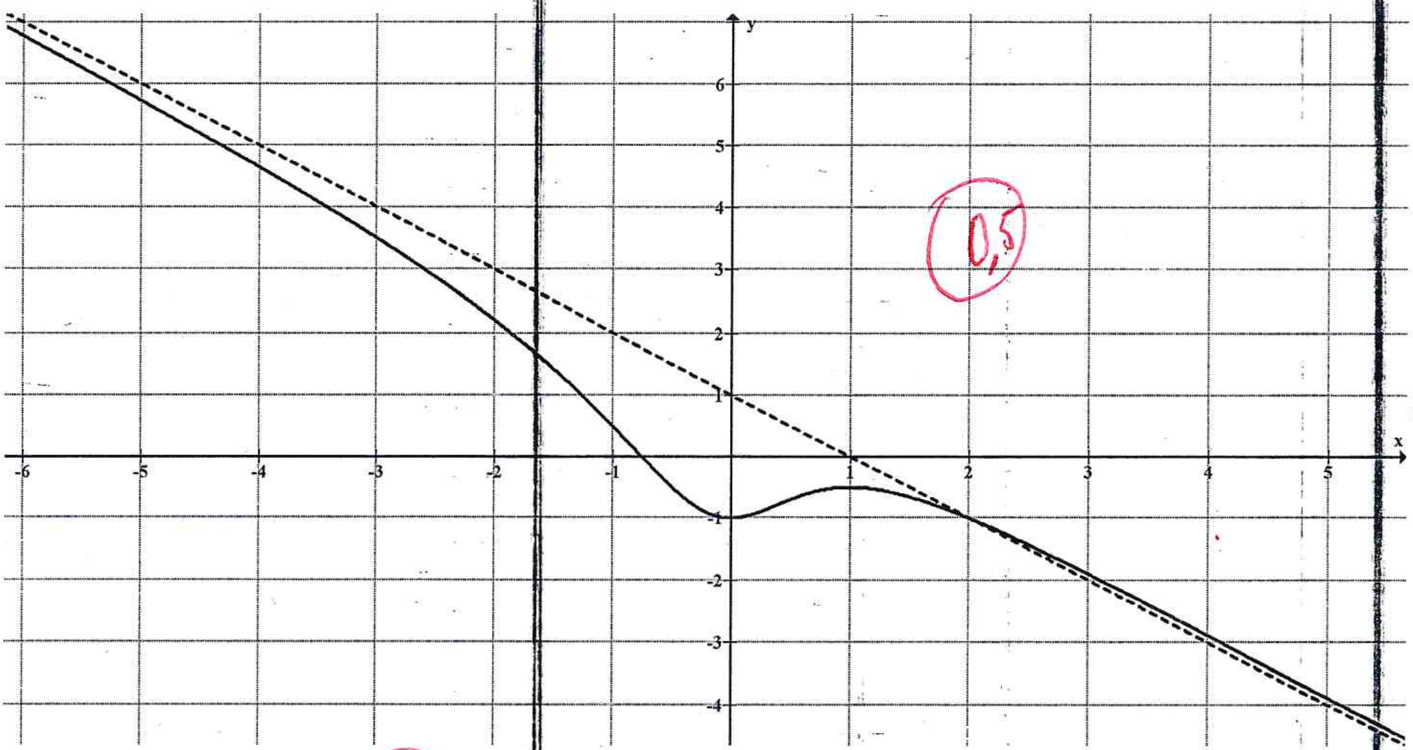
المعادلة (E_1): $2\cos 4x - 1 = 0$

$2(8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1) - 1 = 0$

$16\cos^4 x - 16\cos^2 x + 1 = 0 \ldots (E_2)$

لهما نفس الحلول . (0,5)





0,25 يوجد حل وحيد ، $m \in]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

0,25 يوجد حلين : $m = -1$, $m = -\frac{1}{2}$

0,25 يوجد 3 حلول : $m \in]-1, -\frac{1}{2}[$

0,5 (C_g) هو نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب .