المادّة: الرياضيات
المستوى: 2 علوم تجريبية

التّاريخ: 2022/03/17
المدّة: ساعتين ونصف

اختبار الفصل الثّاني

التّمرين الأول: (06 نقاط)

كيس يحتوي على ثلاث كرات حمراء مرقّمة بـ: 0، 1، 2. وكرتين خضراوين مرقّمتين بـ: 0، 1.
نسحب عشوائيا كرتين على التّوالي من الكيس مع إرجاع الكرة الأولى المسحوبة قبل سحب الثّانية.

I. مثّل هذه التجربة بمخطط مناسب. ثم احسب الاحتمالات $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ للحوادث التّالية:

A : "سحب كرتين من لونين مختلفين ".

B : "سحب كرتين جداء رقميهما معدوم".

C : "سحب كرتين من لونين مختلفين أو جداء رقميهما معدوم".

استنتج احتمال الحوادث $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ ، $A\cap B$ ، $\overline{A}\cap\overline{B}$ و $A\cap\overline{B}$.

II. نستعمل هذه التّجربة لإجراء اللّعبة التّالية:

يربح اللّاعب α نقطة إذا سحب كرة حمراء، و يخسر 30 نقطة إذا سحب كرة خضراء. (α عدد طبيعي)
ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكلّ سحب كرتين، عدد النّقاط التي تحصّل عليها اللاّعب.

1. بين أنّ مجموعة القيم الممكنة لـ X هي $\{2\alpha, \alpha-30, -60\}$.
2. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
3. بيّن أنّ $E(X)=\frac{30\alpha-600}{25}$ ، ثمّ عين قيمة α التي من أجلها تكون اللّعبة عادلة .

III. نضيف للكيس n كرة زرقاء . بيّن أنّ احتمال سحب كرة زرقاء على الأقل يساوي $\frac{n^2+10n}{(n+5)^2}$.

التّمرين الثّاني: (05 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ ، نعتبر النّقط $A(2;1)$ ، $B(1;0)$ و $C(-1;-3)$.
ولتكن النّقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;\sin^2\alpha);(B;(1-\cos\alpha)^2);(C;2\cos\alpha)\}$ ، حيث α عدد حقيقي.

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي α فإن: $\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)^2+2\cos\alpha=2$ ، استنتج أن G موجودة.
2. بيّن أنّ احداثيات النّقطة G هي: $(\frac{\sin^2\alpha-4\cos\alpha+2}{2};\frac{\sin^2\alpha-6\cos\alpha}{2})$.
3. عيّن قيم α حتى تنتمي النّقطة G إلى المستقيم ذو المعادلة $y=2x-\frac{5}{2}$.
4. عيّن طبيعة المجموعة (E) للنّقط M من المستوي التي تحقق:

$$\left\|(\sin^2\alpha)\overrightarrow{MA}+(1-\cos\alpha)^2\overrightarrow{MB}+(2\cos\alpha)\overrightarrow{MC}\right\|=4$$

التّمرين الثّالث: (09 نقاط)

I. لتكن g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $g(x)=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x-1}$.

عين الأعداد الحقيقية α ، β و γ بحيث يقبل منحنى الدّالة g مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النّقطة $(2,2)$ ويقطع محور التّراتيب عند النّقطة ذات التّرتيبة 2- .

II. لتكن f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. احسب النّهايات عند حدود مجالي تعريف الدّالة f .
2. بيّن أنّ (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ) ، يطلب تعيين معادلة لكلّ منهما.
3. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنّسبة للمستقيم المقارب (Δ).
4. بيّن أنّه من أجل كل $x\neq 1$ فإنّ: $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.
5. ادرس تغيرات الدّالة f ثمّ شكل جدول تغيّراتها.
6. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T_1) و (T_2) ميلهما 3- يطلب كتابة معادلة لكلّ منهما.
7. بيّن أنّ نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).
8. ارسم (Δ) ، (T_1) ، (T_2) و (C_f).
9. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=-3x+m$.
10. عيّن قيم العدد الحقيقي λ من المجال $[0;2\pi]$ حتّى تقبل المعادلة $f(x)=4-4\cos^2(\lambda)$ حلّا مضاعفا موجبا.

سؤال إضافي: (نصف نقطة إضافية)

احسب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x^2+x}}{x}$.

بالتّوفيق

حل التمرين ④ :

(I)

	V_0	V_1	R_0	R_1	R_2
N_0	N_0V_0	N_0V_1	N_0R_0	N_0R_1	N_0R_2
V_1	V_1V_0	V_1V_1	V_1R_0	V_1R_1	V_1R_2
R_0	R_0V_0	R_0V_1	R_0R_0	R_0R_1	R_0R_2
R_1	R_1V_0	R_1V_1	R_1R_0	R_1R_1	R_1R_2
R_2	R_2V_0	R_2V_1	R_2R_0	R_2R_1	R_2R_2

$P(A)=\frac{12}{25}$; $P(B)=\frac{16}{25}$; $P(C)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

$P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{13}{25}$; $P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{9}{25}$

$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{12+16-20}{25}=\frac{8}{25}$

$P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\frac{20}{25}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\frac{4}{25}$

(II)

1) $X=\alpha+\alpha=2\alpha$: نسمي كرتين حمراوين

$X=-30-30=-60$: نسمي كرتين خضراوين

$X=\alpha-30$: نسمي كرة خضراء وكرة حمراء

$X=\{2\alpha,\ \alpha-30,\ -60\}$

2) $P(X=2\alpha)=\frac{9}{25}$; $P(X=\alpha-30)=\frac{12}{25}$

$P(X=-60)=\frac{4}{25}$

X	2α	$\alpha-30$	-60
$P(X=x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

3) $E(X)=2\alpha\times\frac{9}{25}+(\alpha-30)\times\frac{12}{25}-60\times\frac{4}{25}$

$E(X)=\frac{30\alpha-600}{25}$

لعبة عادلة : $E(X)=0$ نجد $\boxed{\alpha=20}$

III

- عدد الكرات في الكيس $m+5$ كرة

- بسحب عشوائي بالتواجي ثلاث كرات، عدد الحالات الممكنة $(m+5)^2$

ليكن الحادثة D " سحب كرتين على الأقل "

$\overline{D}$: " عدم سحب كرتين على الأقل "

$P(\overline{D})=\frac{4}{(m+5)^2}$

$P(D)=1-\frac{4}{(m+5)^2}=\frac{m^2+10m}{(m+5)^2}$ ومنه

حل التمرين ② :

1) $=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\cos\alpha+2\cos\alpha$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1=2$

$\sin^2\alpha+(1-\cos^2\alpha)+2\cos\alpha=2+\alpha$

ومنه G مرجح

2) $x_G=\frac{2\times\sin^2\alpha+1\times(1-\cos\alpha)^2-1\times2\cos\alpha}{2}$

نجد : $x_G=\frac{\sin^2\alpha-4\cos\alpha+2}{2}$

$y_G=\frac{1\times\sin^2\alpha+0\times(1-\cos\alpha)^2-3\times2\cos\alpha}{2}$

نجد : $y_G=\frac{\sin^2\alpha-6\cos\alpha}{2}$

3) $\frac{\sin^2\alpha-6\cos\alpha}{2}=2\left(\frac{\sin^2\alpha-4\cos\alpha+2}{2}\right)-\frac{5}{2}$

نجد :

$\cos\alpha(\cos\alpha+2)=0$

$\cos\alpha=0$	$\cos\alpha+2=0$
$\cos\alpha=\cos(\frac{\pi}{2})$	$\cos\alpha=-2$
	مستحيلة

$\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

أو $\alpha=-\frac{\pi}{2}+k\pi$.

أ. بن مسعود

④ $\|\cos\alpha\,\overrightarrow{MA} + (1-\cos\alpha)\overrightarrow{MB} + 2\sin\alpha\,\overrightarrow{MC}\|$

$= \|2\overrightarrow{MC}\| = 2MC$

$2MC = 4$

$\boxed{MC = 2}$

مجموعة النقط (E) هي دائرة مركزها C و نصف قطرها 2.

حل التمرين ③ :

I) $g(2) = 0$ ، $g(0) = -2$ ، $g(2) = 2$

و غالبا $\mathcal{H}$ تمثل g على $\mathbb{R}-\{1\}$

و لدينا المشتقة هي: $g'(x) = \dfrac{\alpha x^2 - 2\alpha x - \beta - \gamma}{(x-1)^2}$

$$\begin{cases} -\gamma = -2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha - 4\alpha - \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$ نجد: $$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g(2) = 2 \\ g'(2) = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\alpha = 1}$ $\boxed{\beta = -2}$ $\boxed{\gamma = 2}$

II)

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

2) $x = 1$ معادلة المستقيم المقارب لـ (C_f)

$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-1}$

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$

و منه (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ و $-\infty$

3) $f(x) - (x-1) = \dfrac{1}{x-1}$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	$\|$	$+$	
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)		$\|$	(C_f) فوق (Δ)	

4) f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{1\}$

$f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1) - (x^2-2x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

---

③

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

$[-\infty, 0[$ و $]2, +\infty[$ المجالين f متناقصة على المجالين

$]0, 1[$ و $]1, 2[$ المجالين f متزايدة على المجالين

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|\|$	$+\infty$	2	$\nearrow$	$+\infty$

④ $\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = -3$ $f'(x) = -3$

$x_2 = \dfrac{3}{2}$ و $x_1 = \dfrac{1}{2}$ نجد

(T_1) : $y = -3x - 1$ من أجل $x = \frac{1}{2}$

(T_2) : $y = -3x + 7$ من أجل $x = \frac{3}{2}$

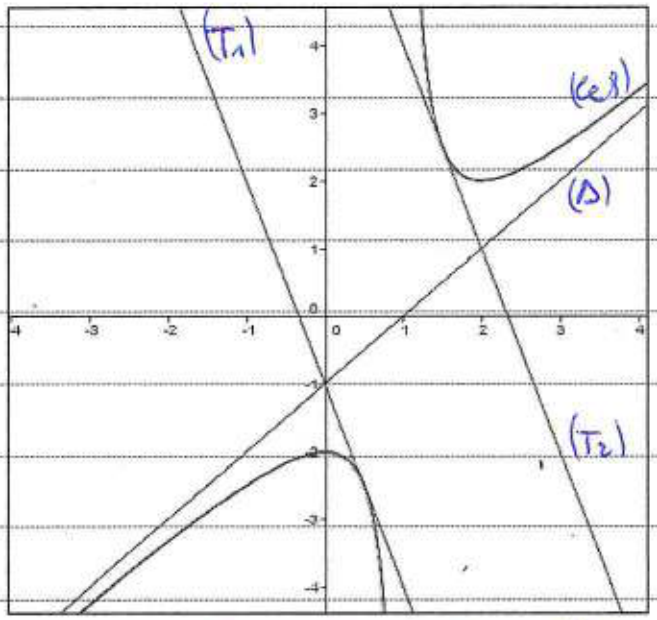
⑦ نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي $(1, 0)$

من أجل $x \neq 1$ لدينا $2 - x \in D_f$

$f(2-x) + f(x) = 0$

و منه $(1, 0)$ مركز تناظر (C_f)

⑧



⑨ $m \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$ المعادلة حلين

$m = -1$ و $m = 2$ المعادلة حل وحيد

$m \in]-1, 2[$ ليس للمعادلة حلول

⑩ حلولها هي حلول $f(x) = 2$ أي $4 - 4\cos^2(x) = 2$

نجد $\cos^2(x) = \frac{1}{2}$ أي $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ أو $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$ نجد