رقم الهاتف: 0550 47 22 35 / 023 71 54 63 فاكس: 023 71 54 67 Email: saitameur3@gmail.com

المستوى الثانية ثانوي شعبة رياضيات
اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات 2سا

التمرين الأول:

الجزء الأول:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{1}{2}$

- نعتبر العبارة : $A(x)=2cos^2(x)+5\sin(x)\cos(x)-3sin^2(x)$

1- بين أن $\frac{1}{2}[5\cos(2x)-1]=2cos^2(x)-3sin^2(x)$

2- استنتج أن $A(x)=\frac{1}{2}[5\cos(2x)+5\sin(2x)-1]$

3- بين أن $A(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

4- استنتج حلا للمعادلة $2A(x)+1=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ في المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

الجزء الثاني:

1- أنشئ النقط A، B، C، D و E حيث:

أ- المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين حيث $AB=5cm$ و$\frac{\pi}{2}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$

ب- المثلث ADB متقايس الأضلاع حيث $\frac{\pi}{3}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB})$

جـ- $BE=BA$ و $-\frac{2\pi}{3}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE})$

2- بين أن النقط B، D و E على استقامية ثم عين القيس الرئيسي للزاوية $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE})$

التمرين الثاني:

$\boldsymbol{I}$) 1) ليكن α عدد حقيقي معطى، نعتبر f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

أثبت أن: $\lim_{x \to \alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x - \alpha} = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$

2) استنتج: $\lim_{x \to y} \frac{y x^{2025} - x y^{2025}}{y - x}$

II) أدرس النهايتين التاليتين: 1) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27}$ 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3 - 27}$

التمرين الثالث:

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1- أدرس تغيرات الدالة g ثم ضع جدول تغيراتها

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

3- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

الجزء الثاني: f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ : $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة $4\ cm$)

1- احسب $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

2- تحقق أن $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ ثم احسب نهاية الدالة f عند -1 .
ماذا تستنتج ؟

3- بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ حيث f' هي مشتقة الدالة f

4- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

5- عين معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

6- جد حصرا للعدد $f(\alpha)$، ثم أنشئ المماس (Δ) والمنحنى (C_f)

7- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = m^2 + 1$ حلا وحيدا سالبا

التصحيح النموذجي

التمرين الأول :

الجزء الأول:

حلول المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{1}{2}$ هي $S=\{-\frac{\pi}{24}+k\pi\,;\frac{7\pi}{24}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

- نعتبر العبارة : $A(x)=2cos^2(x)+5\sin(x)\cos(x)-3sin^2(x)$

1- لدينا $\frac{1}{2}[5\cos(2x)-1]=\frac{1}{2}[5cos^2x-5sin^2x-sin^2x-cos^2x]$

$$=\frac{1}{2}[4cos^2x-6sin^2x]$$

$$=2cos^2x-3sin^2x$$

2- لدينا $A(x)=2cos^2(x)+5\sin(x)\cos(x)-3sin^2(x)$ ومنه:

$$A(x)=\frac{1}{2}[5\cos(2x)-1]+\frac{5}{2}\sin(2x)=\frac{1}{2}[5\cos(2x)+5\sin(2x)-1]$$

3- نبين أن $A(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$:

باستعمال دساتير الجمع : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(2x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos(2x)\sin(\frac{\pi}{4})$

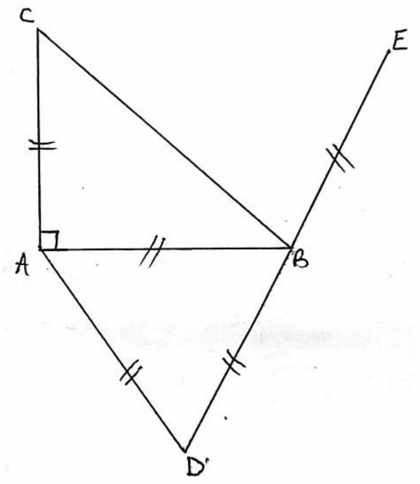
و بالتعويض نجد : $A(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

4- $2A(x)+1=\frac{5\sqrt{2}}{2}$ تكافئ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ حلولها في المجال $]0;\frac{\pi}{2}[$ هي :

$S=\{\frac{7\pi}{24}\}$

الجزء الثاني:

1- إنشاء النقط A، B، C، D و E :



2- إثبات استقامية النقط B ، D و E :

حسب علاقة شال: $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE})$

ومنه $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BE}) = -\frac{2\pi}{3}$

ومنه $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BE}) = -\pi$

إذن الشعاعان $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ مرتبطين خطيا ومنه النقط B ، D و E على استقامية

تعيين القيس الرئيسي لقيس الزاوية $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE})$:

حسب علاقة شال لدينا $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BE}) = -\pi$

ومنه $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}) = -\frac{5\pi}{12}$

التمرين الثاني :

I) 1) ليكن α عدد حقيقي معطى، نعتبر f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إثبات أن: $\lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x-\alpha} = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$

لدينا :

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha f(x) - \alpha f(\alpha) - x f(\alpha) + \alpha f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha(f(x)-f(\alpha)) - f(\alpha)(x-\alpha)}{x-\alpha}$$

$$= \lim_{x\to\alpha} \alpha \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} - f(\alpha)\frac{x-\alpha}{x-\alpha} = \alpha f'(\alpha) - f(\alpha)$$

2) استنتاج: $\lim_{x\to y} \frac{yx^{2025} - xy^{2025}}{y-x}$

بوضع $f(x) = x^{2025}$ نجد $\lim_{x\to y} \frac{yx^{2025} - xy^{2025}}{y-x} = -2024y^{2025}$

II) دراسة النهايتين التاليتين: 1) $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3-27}$ 2) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3-27}$

$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3-27} = -\frac{1}{28}$ و $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x-2}}{x^3-27} = 0$ (إزالة ح ع ت باستعمال المرافق)

التمرين الثالث :

الجزء الأول:

1- دراسة تغيرات الدالة g :

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

الدالة g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;0]$ و $[1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على المجال $[0;1]$

2- الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1;+\infty[$ فهي رتيبة تماما على المجال $[1;2]$ ولدينا $g(1)\times g(2) < 0$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

3- استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

على المجال $]-\infty;\alpha[$ لدينا $g(x) < 0$

على المجال $]\alpha;+\infty[$ لدينا $g(x) > 0$

و $g(\alpha) = 0$

الجزء الثاني:

1- $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$ ، (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y = 0$

2- بالنشر والتبسيط نجد $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = +\infty$ ، (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = -1$

3- من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$

4- إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ لأن $(x^3+1)^2 > 0$ ومنه:

f متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$

f متناقصة تماما على المجالين $]-\infty; -1[$ و $]-1; \alpha[$

جدول تغيرات الدالة f

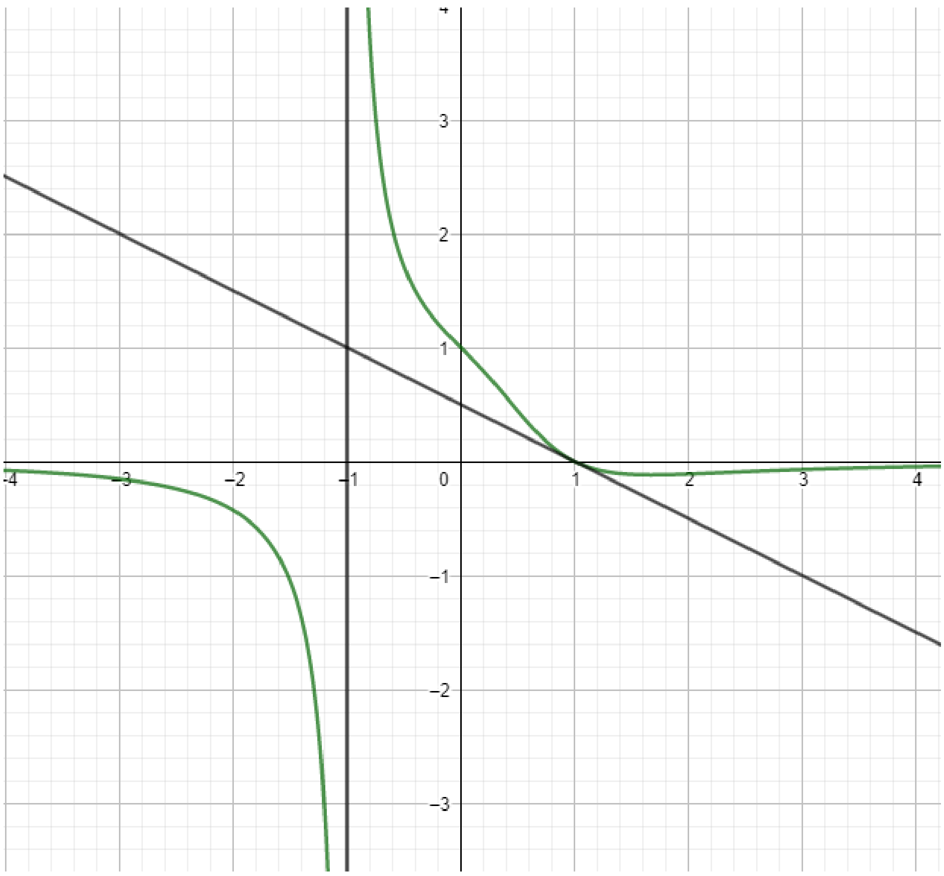
5) معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند الفاصلة 1:

$$(\Delta): y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

6) $f(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha^3+1}$ علما أن $1 < \alpha < 2$ نجد $-1 < f(\alpha) < 0$

نضع $f(\alpha) \approx -0,25$

إنشاء المنحنى (C_f) والمماس (Δ) بوحدة طول $4cm$:



7- من أجل كل $m \in \mathbb{R}$ فإن المعادلة $f(x) = m^2 + 1$ تقبل حلا وحيدا سالبا