المستوى الثانية رياضيات	مارس 2022
اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	المدة: ساعتان

التمرين الأول

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ النقط $A(1;2)$; $B(-8;-1)$; $C(3;4)$ و H نقطة معرفة كما يلي : $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

1) بين أنّ النقطة H هي مرجح النقطتين A و C المرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما .

2) لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;-1);(C;-3)\}$.

أ- أنشئ G .

ب- احسب إحداثيتي النقطة G .

جـ بين أن النقط B ; H و G على استقامة واحدة .

3) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\|=3(k+1)^2, k\in\mathbb{R}$

أ- عبر عن الشعاع $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$ بدلالة $\overrightarrow{MG}$

ب- عين قيم k حتى تكون (E) دائرة نصف قطرها 1 يطلب تعيين مركزها, ثم أنشئها.

4) عين و أنشئ مجموعة النقط M من المستوي في الحالة التالية $2\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\|=3\|\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MC}\|$

التمرين الثاني

I) تعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^3+3x^2+3x+2$

1) أدرس تغيرات الدالة g.

2) أحسب $g(-2)$ ثم حل المعادلة $(x)=0$.

3) استنتج إشارة $g(x)$.

II) تعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}$$

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$:

$$f'(x)=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

2) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$ حيث $a\,;b\,;c$ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3) بين أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل (Δ), يطلب تعيين معادلتيهما.

4) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) بين أنّ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\propto$ حيث $\propto \in]-0,35;-0,34[$.

6) ارسم المنحنى (C_f).

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$m-3+\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

III) تعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x)=\frac{2|x|^3+7x^2+8|x|+2}{(|x|+1)^2}$$

1) بين أنّ الدالة h زوجية.

2) وضح كيف يتم إنشاء المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) ثم أنشئه.

التصحيح النموذجي:

التمرين الأول (6 ن):

1) H مرجح الجملة المثقلة $\{(A;-1);(C;3)\}$

2) أ) الإنشاء: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

ب) الاحداثيات : $G(0;3)$

3) G مرجح الجملة المثقلة $\{(H;-2);(B;-1)\}$ ومنه النقط G ;H ;B على استقامية.

ب) قيم k: $k=-2$ او $k=0$

4) $\mathrm{MG}=\mathrm{MH}$: مجموعة النقط M هي محور القطعة $[GH]$

التمرين الثاني (14 ن):

1) دراسة التغيرات

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$g'(x) = 3(x+1)^2$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ حساب $g(-2)$:

$$g(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 3(-2) + 2$$
$$= 0$$

- حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا (-2) جذر لـ $g(x)$ ومنه:

$$\begin{aligned} g(x) &= \big(x - (-2)\big)(x^2 + ax + b) \\ &= (x+2)(x^2 + ax + b) \\ &= x^3 + ax^2 + bx + 2x^2 + 2ax + 2b \\ &= x^3 + (a+2) + (b+2a)x + 2b \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a + 2 = 3 \\ b + 2a = 3 \\ 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

إذن:

$$g(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(x^2 + x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ \text{أو} \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{cases}$$

لحل المعادلة $(x^2 + x + 1 = 0)$ نستعمل المميز Δ:

ومنه $(x^2 + x + 1) > 0$ في $\mathbb{R}$

❸ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}$$

❶ تبيين أنّ: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(x+1)^3}$:

❷ دراسة تغيرات الدالة f، وتشكيل جدول تغيراتها:

- تعيين النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3 + 7x^2 + 8x + 2}{(x+1)^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}(2x) = -\infty$$
$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(2x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = -\infty \text{ و } \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = -\infty$$

ومنه إشارة $f'(x)$ كالآتي:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$2g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x+1)^3$		$-$		$-$	‖	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

- جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ تبيين أنّ: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$:

$$f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

أ/ تبيين أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين:

لدينا: $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = -\infty$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(2x+3)] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[2x+3-\frac{1}{(x+1)^2}-(2x+3)\right]\\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-1}{(x+1)^2}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

ومنه: (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$ معادلته $y_{(\Delta)} = 2x + 3$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

لدينا $(x+1)^2 > 0$ ومنه $\left(f(x) - y_{(\Delta)}\right) < 0$

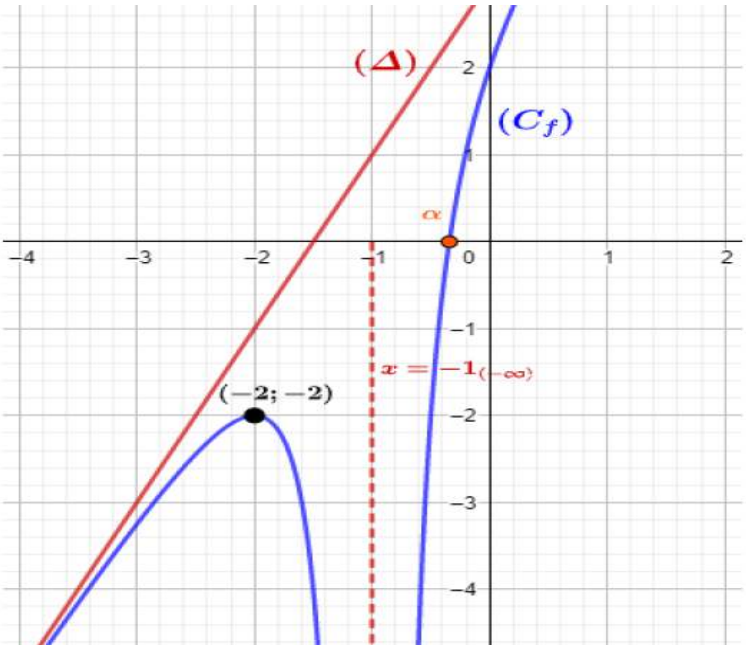
إذن (C_f) تحت (Δ) لما $x \in D_f$.

❺ تبيين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $\alpha \in \,]-0.35; -0.34[$:

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1; +\infty[$

ولدينا: $f(-0.35) \times f(-0.34) < 0$ لأنّ: $f(-0.35) \approx -0.07$ و $f(-0.34) \approx 0.02$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ حيث: $-0.35 < \alpha < -0.34$



❼ المناقشة البيانية

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات المائلة ذات المعادلة $y_m = 2x + m$، وهي:

لما $m \in]-\infty;2[$: يوجد حلان سالبان

لما $m \in]2;3[$: يوجد حلان احدهما سالب تماما والأخر موجب تماما

لما $m = 2$: يوجد حل مضاعف سالب وحل معدوم

لما $m \in [3;+\infty[$: لا يوجد حلول

❶ تبيين أنّ الدالة h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

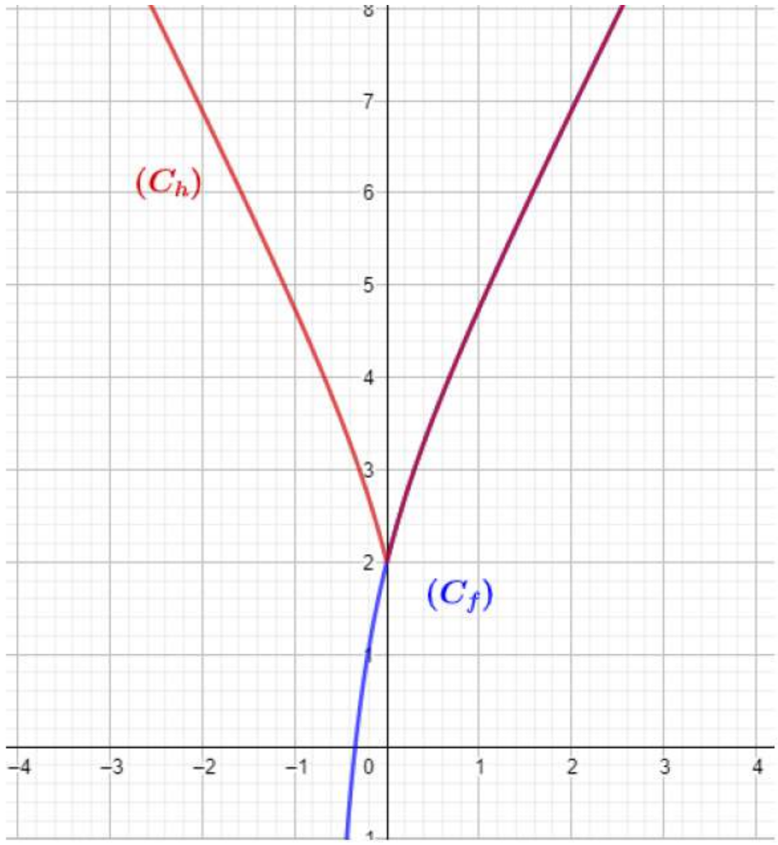
$h(-x) = h(x)$ ومنه الدالة h زوجية.

❷ رسم المنحنى (C_h) :

لما $x \geq 0$ لدينا: $h(x) = f(x)$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $x \in \mathbb{R}_+$

وبما أنّ الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة إلى محور التراتيب.



(C_h)
(C_f)

التصحيح النموذجي:

التمرين الأول (6 ن):

1) قيم α: $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$

2) أ) الإنشاء: $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

ب) $\mathrm{MG} = 4$: مجموعة النقط M هي دائرة مركزها G و نصف قطرها 4

ج) $\mathrm{MG} = \mathrm{MI}$: مجموعة النقط M هي محور القطعة $[GI]$

3) أ) $x_G = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$ و $y_G = \frac{-10\alpha}{\alpha+1}$

ب) مجموعة النقط $_\alpha$ عندما يمسح α $\mathbb{R} - \{-1\}$ هي مستقيم معادلته $y = -5x$

التمرين الثاني (14 ن):