التمرين الأول (05 نقاط)

نعتبر كثيري الحدود P و Q المعرّفين على $\mathbb{R}$ بـ: $Q(x)=3x^2-4x+1$ و $P\left(\frac{x}{3}\right)=Q(x)$

❶ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $Q(x)=0$ [00.50 ن]

❷ احسب $P(0)$ و $P(1)$ [01.50 ن]

❸ أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $P(x)=27x^2-12x+1$ [01.50 ن]

❹ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x)=3Q(x)$ ، ثمّ عيّن إشارة $\frac{P(x)}{3Q(x)}$ [01.50 ن]

التمرين الثاني (09 نقاط)

I) g الدالة العددية g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+3x+2$، وليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

❶ أ- ادرس تغيرات الدالة g [01.00 ن]

ب- ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_g) [00.50 ن]

❷ أ- احسب $g(-2)$ ، ثمّ حل المعادلة $g(x)=0$ [01.50 ن]

ب- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ [01.00 ن]

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{2x^3+7x^2+8x+2}{(x+1)^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

❶ أ- بيّن أنّه من أجل كل x حقيقي يختلف عن -1 لدينا، $f'(x)=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$ [01.00 ن]

ب- استنتج تغيرات الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها [01.00 ن]

❷ أ- a، b، c ثلاث أعداد حقيقية، بيّن أنّ: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$ [01.00 ن]

ب- ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x+3$ [00.50 ن]

ج- أثبت أنّه لا توجد أي مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم (Δ) [00.50 ن]

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $h(x)=\frac{2x^3-1}{x^2}$

❶ تحقق أنه من أجل كل x حقيقي غير معدوم: $h(x)+1=f(x-1)$ [00.50 ن]

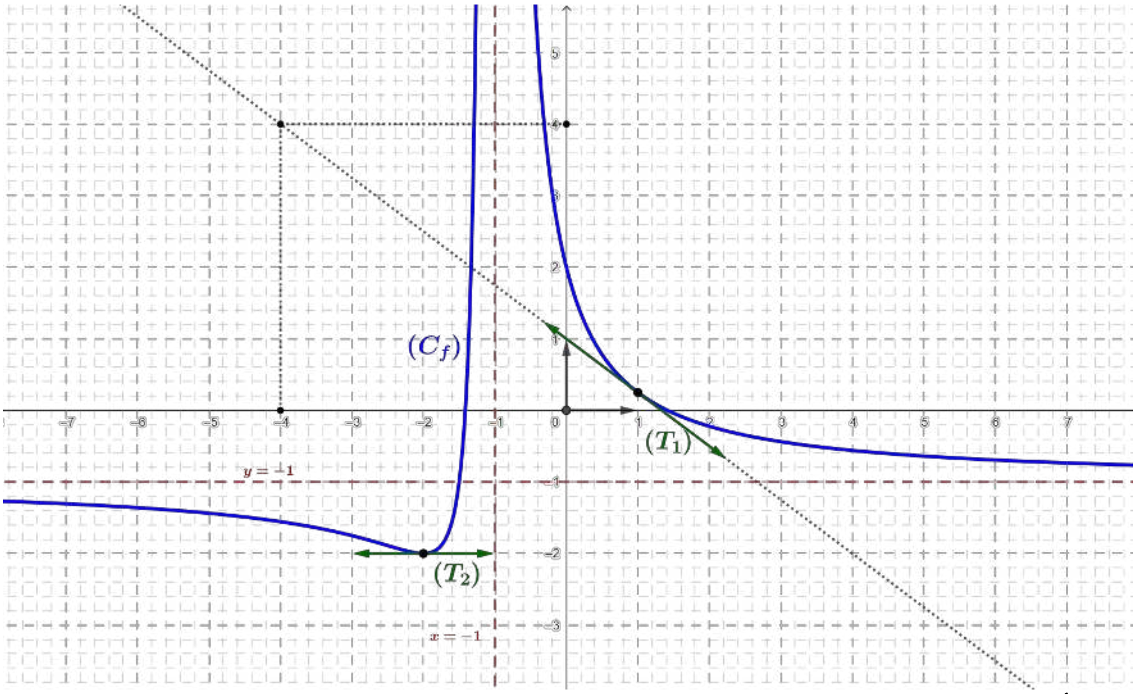
❷ اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) منحنى الدالة h إنطلاقا من (C_f) [00.50 ن]

التمرين الثالث (06 نقاط)

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ: $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{(x+1)^2}$ ، حيث a، b و c أعداد حقيقية. و(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

(T_1) و(T_2) مماسين للمنحنى (C_f) في النقطتين $A\left(1;\frac{1}{4}\right)$ و $B(-2;-2)$.

كما هو مبين في الشكل الآتي:



بقراءة بيانية، أجب على ما يلي:

❶ عيّن حلول المعادلة $f'(x)=0$ [00.50 ن]

❷ شكّل جدول إشارة الدالة المشتقة f' ثمّ استنتج جدول تغيرات الدالة f [00.75 ن]

❸ عيّن: $f(0)$، $f(-2)$ ، $f'(-2)$ و $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)$ [01.75 ن]

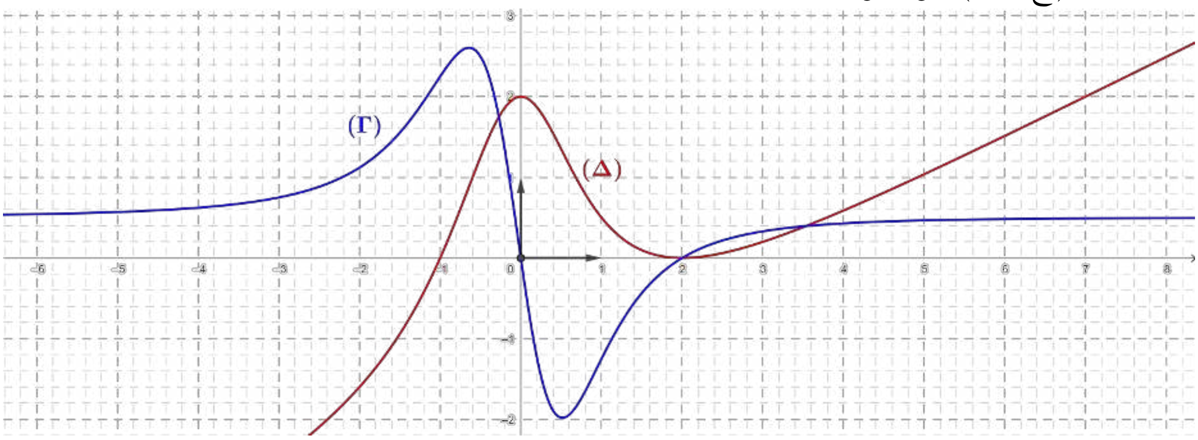
❹ m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x)=m$ [01.00 ن]

❺ مما سبق، عيّن عبارة (T_1) ، (T_2) و$f(x)$ [02.00 ن]

تمرين إضافي: (+01 نقطة)

إليك التمثيلان البيانيان (Δ) و (Γ) أحدهما خاص بالدالة الـ f والآخر لمشتقتها f'

- أنسب (مع التبرير) كل تمثيل لدالته [01.00 ن]



حِكمة: مهما كان العلم متعبًا، فلن يكون أشد إرهاقًا من الجهل

التمرين ①:

1) حل $Q(x)=0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(3)(1)$$
$$= 16 - 12 = 4 > 0$$

اذن يوجد جذران لـ $Q(x)$:

$$x = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2(3)} = 1 \quad \text{أو} \quad x = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2(3)} = \frac{1}{3}$$

اذن $S = \left\{1, \frac{1}{3}\right\}$

2)

$$P(0) = P\left(\frac{0}{3}\right) = Q(0) = 1$$

$$P(1) = P\left(\frac{3}{3}\right) = Q(3) = 16$$

3)

لدينا: $P\left(\frac{x}{3}\right) = Q(x)$

نضع $\frac{x}{3} = t$ ومنه: $x = 3t$

$p(t) = Q(3t)$:إذن

$p(t) = 3(3t)^2 - 4(3t) + 1$

$= 3(9t^2) - 12t + 1$

$p(t) = 27t^2 - 12t + 1$

وعليه:

$$\boxed{p(x) = 27x^2 - 12x + 1}$$

$p(x) = 3Q(x)$:لدينا

ومنه: $27x^2 - 12x + 1 = 3(3x^2 - 4x + 1)$

$27x^2 - 12x + 1 = 9x^2 - 12x + 3$

$18x^2 = 2$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1}{9}}$

$|x| = \frac{1}{3}$

$x = -\frac{1}{3}$ أو $x = \frac{1}{3}$ إذن

$S = \left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

إشارة $\frac{P(x)}{3Q(x)}$:

لدينا : $P(x) = Q(3x)$

تكافئ : $\begin{cases} 3x = 1 \\ \text{أو} \\ 3x = \frac{1}{3} \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \text{أو} \\ x = \frac{1}{9} \end{cases}$

إذن $S_{P(x)=0} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{9} \right\}$

وعليه : $(3 > 0)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$Q(x)$		$+$	|	$+$	||	$-$	||	$+$	
$\frac{P(x)}{3Q(x)}$		$+$	0	$-$	||	$-$	||	$+$	

التمرين 2 :

I / ① أ- تغيرات g

لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$

لدينا: $\Delta = 6^2 - 4(3)(3) = 0$

ومنه $g'(x)=0$ معناه $x = \frac{-6}{2(3)} = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$

اذن الدالة g متزايدة على $\mathbb{R}$ ،

ب/ الاستنتاج :

لدينا : $g'(x)$ تنعدم عند (-1) و

تغير اشارتها ومنه (C_g) يقبل

نقطة انعطاف عند الفاصلة -1.

② أ. حساب $g(-2)$:

$$g(-2) = -8+12-6+2=0$$

ب/ حل المعادلة $g(x)=0$.

لدينا: $g(x) = (x+2)(ax^2+bx+c)$

	1	3	3	2
-2	0	-2	-2	-2
	1	1	1	0

$$g(x) = (x+2)(x^2+x+1)$$

اذن/

لدينا: $g(x)=0$

معناه $\begin{cases} x+2=0 \\ \text{أو} \\ x^2+x+1=0 \quad \dots (Q(x)) \end{cases}$

لدينا: $x+2=0$ معناه $x=-2$

ولدينا: $Q(x)=0$ لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta=-3<0$

إذن: $S_{g(x)=0}=\{-2\}$

ب/ بما أن g متزايدة على $\mathbb{R}$ و $g(-2)=0$

فإن:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

II) 1) أ) لدينا f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}-\{-1\}$

$$f'(x)=\frac{(6x^2+14x+8)(x+1)^2-(2)(x+1)(2x^3+7x^2+8x+}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{(x+1)\left[(6x^2+14x+8)(x+1)-2(2x^3+7x^2+8x+2)\right]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{6x^3+14x^2+8x+6x^2+14x+8-4x^3-14x^2-16x-4)}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{2(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^3}=\frac{2g(x)}{(x+1)^3}$$

ب/ تغيرات f :

لدينا: $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{(x+1)^3}$

لدينا $(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1)$

لدينا: $x+1 \neq 0$ معناه $x \neq -1$

وعليه:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x+1)$		$-$		$-$	||	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

وعليه f : متزايدة تماما على $]-\infty,-2[$ و $]-1,+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-2,-1[$

- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	2.9	$\searrow$	||	$\nearrow$	

② ايجاد a ، b ، c :

من أجل كل x حقيقي يختلف عن -1 ، لدينا :

$$ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}=\frac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{ax^3+x^2(2a+b)+x(a+2b)+(b+c)}{(x+1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$:

نجد :

$$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=7 \\ a+2b=8 \\ b+c=2 \end{cases}$$

ومنه: $a = 2$ ، $b = 3$ و $c = -1$ ،

اذن: $$f(x) = 2x+3 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

ب/ الوضع النسبي:

من أجل كل $x \neq -1$ لدينا:

$$f(x) - (2x+3) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

وعليه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(x)}$	$-$	‖	$-$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)

جـ/ نفرض وجود مماس لـ (C_f) يوازي (Δ)

ونصل إلى تناقض

لدينا: $f'(\alpha) = 2$

أي: $$\frac{2g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = 2$$

ومنه: $\frac{2(\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2)}{(\alpha+1)^3}=2$

ومنه: $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2=(\alpha+1)^3$

ومنه $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+2=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$

ومنه: $2=1$

وهذا مستحيل

اذن لا يوجد اي مماس لـ (C_f) يوازي (Δ)

III /

1) نثبت أن $f(x-1)=h(x)+1$

من أجل كل $x\neq 0$ لدينا:

$$f(x-1)=\frac{2(x-1)^3+7(x-1)^2+8(x-1)+2}{(x-1+1)^2}$$

$$=\frac{2(x^3-3x^2+3x-1)+7(x^2-2x+1)+8x-8+2}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3-6x^2+6x-2+7x^2-14x+7+8x-6}{x^2}$$

$$=\frac{2x^3+x^2-1}{x^2}=\frac{2x^3-1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}=h(x)+1$$

اذن $f(x-1)=h(x)+1$

أي: $h(x)+1 = f(x-1)$

ومنه: $h(x) = f(x-1) - 1$

ومنه (C_h) صورة (C_f) بانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\binom{1}{-1}$

التمرين 3:

① $S_{f'(x)=0} = \{-2\}$

②

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\|\|$	$\searrow$	1

③

$f(0) = 2$

$f(-2) = -2$

$f'(-2) = 0$

$$\lim_{h \to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right) = f'(1)$$

$$= \frac{4-\frac{1}{4}}{-4-1} = \frac{\frac{15}{4}}{-5} = -\frac{3}{4}$$

4

حلول المعادلة $f(x)=m$
هي فواصل نقط تقاطع (C_f)
مع المستقيمات ذات المعادلة
$y=m$

لما: $m<-2$ لا يوجد حلول
لما: $m=-2$ للمعادلة حل وحيد سالب تماما
لما: $-2<m<-1$ للمعادلة حلان سالبان تماما
لما $m=-1$ حل واحد سالب تماما

التمرين الثالث ﴿06 نقاط﴾

❶ تعيين حلول المعادلة $f'(x) = 0$

$$S_{f'(x)=0} = \{-2\}$$

❷ تشكيل جدول إشارة الدالة المشتقة f' واستنتاج جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		-1		$-\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	‖	$\searrow$	

❸ تعيين $f(0)$، $f(-2)$، $f'(-2)$ و $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)$:

لدينا: • $f(0) = 2$ • $f(-2) = -2$ • $f'(-2) = 0$

$$\bullet \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right) = f'(1) = \frac{4-\frac{1}{4}}{-4-1} = -\frac{3}{4}$$

❹ المناقشة البيانية حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$:

حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = m$:

- لما: $m < -2$ المعادلة لا تقبل حولا
- لما: $m = -2$ للمعادلة حل مضاعف سالب تماما
- لما: $-2 < m < -1$ للمعادلة حلان سالبان تماما
- لما: $m = -1$ للمعادلة حل سالب تماما
- لما: $-1 < m < 2$ للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة
- لما: $m = 2$ للمعادلة حل معدوم وحل سالب تماما
- لما: $m > 2$ للمعادلة حلان سالبات تماما

❺ تعيين عبارة (T_1)، (T_2) و $f(x)$:

$$\bullet\ (T_1): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$
$$= -\frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{4}$$
$$= -\frac{4}{3}x + 1$$

$$\bullet\ (T_2): y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$$
$$= 0(x+2) - 2$$
$$= -2$$

- تعيين عبارة $f(x)$

لدينا: $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)^2}$ و $f'(x) = \frac{(2ax+b)(x+1)^2 - 2(x+1)(ax^2+bx+c)}{(x+1)^4}$

لدينا: $f(0) = 2$ ومنه: $\boxed{c = 2}$

لدينا: $f(-2) = -2$ ومنه: $4a - 4b + c = -2$ أي: $4a - 4b + 2 = -2$ أي: $4a - 4b = -4 \ldots (*)$

لدينا: $f'(-2) = 0$ ومنه: $(-4a+b) + 2(4a-4b+c) = 0$ ومنه: $4a - 9b = -4$ ومنه: $-4a + 9b = 4 \ldots (**)$

بجمع $(*)$ و $(**)$ نجد: $5b = 0$ ومنه: $\boxed{b = 0}$

نعوض قيمة b في $(*)$ نجد: $\boxed{a = -1}$

إذن: $f(x) = \frac{-x^2+2}{(x+1)^2}$