الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية سطيف — الموسم الدراسي: 2025 / 2026

المستوى: الثانية رياضيات — ثانوية سليمان عميرات – بني ورتيلان -

الفرض الأول للثلاثي الثاني في مادة الرياضيات — المدة ⏲ : ساعتين — التاريخ : 2026/02/15

التمرين الاول

أحسب النهايات التالية

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-x^2-5x-3}{x^3+(2-n)x^2+(1-2n)x-n}\quad n\in\mathbb{N}\quad ;\quad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}\quad ;\quad \lim_{|x|\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{4x^2-1}-2x}$$

التمرين الثاني :

صندوق u يحتوي على 6 كريات لا تفرق بينها عند اللمس , (03) كريات بيضاء تحمل كل منها العدد 0 ; 1 و 2 , و كرية حمراء تحمل العدد 3 و كريتان سوداوان تحمل كل منها العدد β و $\beta+1$ (حيث β عدد زوجي أكبر تماما من 2) . نسحب عشوائيا من الصندوق u كريتين على التوالي دون الارجاع

1. أنشئ مخططا مناسبا يبين جميع الإمكانيات المناسبة لهذه التجربة العشوائية
2. a) أحسب احتمال الاحداث التالية :

الحدث A " الحصول على كريتين من لونين مختلفين " الحدث B " الحصول على كريتين مجموع عدديهما عدد زوجي "

الحدث C " الحصول على كريتين سوداوان أو بمجموع عدديهما زوجي فقط "

b) بين أن : $P(\overline{A}\cap B)=\frac{1}{15}$, ثم أحسب $P(\overline{A}\cup B)$

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب القيمة المطلقة للفرق بين العددين المتحصل عليهما

3. a) ما هي القيم الممكنة لـ $X(\Omega)$, ثم عين قانون احتمال المتغير العشوائي X

b) بين أن : $E(X)=\frac{8\beta+3}{15}$. ثم عين قيمة العدد الحقيقي β التي تحقق $E(39X+1447)=1954$

c) أحسب $P(X^3-(2\beta+1)X^2+(\beta^2+2\beta-1)X+1-\beta^2=0)$

التمرين الثالث :

ABC مثلث كيفي مزود بالمعلم $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$.

لكل عدد حقيقي t من المجال $[0;1]$, نعرف النقطة G_t مرجح الجملة المثقلة $\{(A;t^2);(B;(1-t)^2);(C;2t(1-t))\}$

1. a) برر أن النقطة G_t موجودة مهما يكن $t\in[0;1]$

b) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $[0;1]$ فان : $\overrightarrow{AG_t}=(1-t)^2\overrightarrow{AB}+2t(1-t)\overrightarrow{AC}$, ثم استنتج احداثيي النقطة G_t بدلالة t

c) عين قيم العدد الحقيقي t التي من أجلها تنتمي النقطة G_t الى المستقيم ذي المعادلة $y=x$

d) بين أن مجموعة النقط G_t من المستوي لما t يمسح المجال $[0;1]$ منحنى معادلته $y=2(\sqrt{x}-x)$

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ : $f(x)=2(\sqrt{x}-x)$

2. a) أدرس تغيرات الدالة f

b) استنتج قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون ترتيبة النقطة G_t أكبر ما يمكن (أعظمية)

نعرف النقطة D_t مرجح الجملة المثقلة $\{(B;(1-t));(C;2t)\}$

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي t من المجال $[0;1]$ فان : $\overrightarrow{AG_t}=(1-t^2)\overrightarrow{AD_t}$, ثم أنشئ النقطتين $D_{\frac{1}{2}}$ و $G_{\frac{1}{2}}$

4. نعتبر (Γ_t) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\left\|t^2\overrightarrow{MA}+(1-t)^2\overrightarrow{MB}+2t(1-t)\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{4(1-t)}{3}\left\|(1-t)\overrightarrow{MB}+2t\overrightarrow{MC}\right\|$

ـ عين قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المجموعة (Γ_t) مستقيما محوريا للقطعة المستقيمة $[G_tD_t]$ ثم أنشئ المجموعة $\left(\Gamma_{\frac{1}{2}}\right)$

تصحيح الفروض

2nd / 2016

التمرين الأول :

- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x^3 + (2-m)x^2 + (1-2m)x - m} \quad (\to \frac{0}{0})$$

$x^3 - x^2 - 5x - 3$	$x + 1$
$-x^3 - x^2$	$x^2 - 2x - 3$
$0 - 2x^2 - 5x$	
$2x^2 + 2x$	
$-3x - 3$	
$+3x + 3$	
0	

$x^3 + (2-m)x^2 + (1-2m)x - m$	$x + 1$
$-x^3 - x^2$	$x^2 + (1-m)x - m$
$0 + (1-m)x^2 + (1-2m)x$	
$(1-m)x^2 + (1-m)x$	
$0 - mx - m$	
$+mx + m$	
0	

ومنه :

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2 - 2x - 3)}{(x+1)(x^2 + (1-m)x - m)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + (1-m)x - m} \quad (\to \frac{0}{0}) \quad : \text{ح.غ.ت}$$

نقوم مرة أخرى بتحليل البسط والمقام نجد :

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-m)} \quad (\to -4,\ \to -1-m) = \frac{4}{m+1}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x^2+1} - 2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}} \quad (\to \frac{0}{0}) \quad : \text{ح.غ.ت}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{3x^2+1} - 2)(\sqrt{3x^2+1} + 2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})}{(\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1})(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})(\sqrt{3x^2+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{((3x^2+1) - 4)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})}{[(x+3) - (3x+1)](\sqrt{3x^2+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(3x^2-3)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})}{(-2x+2)(\sqrt{3x^2+1} + 2)} \quad (\to \frac{0}{0}) \quad : \text{ح.غ.ت}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})}{-2(x-1)(\sqrt{3x^2+1} + 2)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3(x+1)(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})}{-2(\sqrt{3x^2+1} + 2)} \quad (\to 24,\ \to -8) = -6$$

$$\lim_{|x|\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{4x^2-1} - 2x} \quad (\to \frac{+\infty}{+\infty}) \quad : \text{ح.غ.ت}$$

حالة : $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{4x^2-1} + 2x)}{(\sqrt{x^2+1} + x)(\sqrt{4x^2-1} - 2x)(\sqrt{4x^2-1} + 2x)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1(\sqrt{4x^2-1} + 2x)}{-1(\sqrt{x^2+1} + x)}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2(1 - \frac{1}{4x^2})} + 2x}{-\sqrt{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} + x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} + 2x}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x(\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}} + 1)}{-x(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1)} \quad (\to 0) = \frac{4}{-2} = -2$$

صفحة الاستاذ فضلول للرياضيات

حالة: $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{4x^2-1}-2x} = \text{ت.ع.ح}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{-2x\left(\sqrt{1-\frac{1}{4x^2}}+1\right)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

التمرين الثاني:

$(B_0\ B_1\ B_2\ R_3\ N_B\ N_{B+1})$ مزيج u

① المخطط الشجري / جدول

② \ ①	B_0	B_1	B_2	R_3	N_B	N_{B+1}
B_0		B_0B_1	B_0B_2	B_0R_3	B_0N_B	B_0N_{B+1}
B_1	B_1B_0		B_1B_2	B_1R_3	B_1N_0	B_1N_{B+1}
B_2	B_2B_0	B_2B_1		B_2R_3	B_2N_B	B_2N_{B+1}
R_3	R_3B_0	R_3B_1	R_3B_2		R_3N_B	R_3N_{B+1}
N_B	N_BB_0	N_BB_1	N_BB_2	N_BR_3		N_BN_{B+1}
N_{B+1}	$N_{B+1}B_0$	$N_{B+1}B_1$	$N_{B+1}B_2$	$N_{B+1}R_3$	$N_{B+1}N_B$	

② حساب احتمال الحوادث:

$$P(A) = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}$$

$$P(B) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

الحادثة E: الحصول على كرتين

من دارين.

$$P(C) = P(B \cup E) = P(B) + P(E) - \underbrace{P(B \cap E)}_{=0}$$

$$= \frac{12}{30} + \frac{2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

⑥ بيان أن: $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{15}$

$\bar{A}$: الحصول على كرتين من نفس اللون

و مجموع عددهما فردي

$\bar{A} \cap B$: الحصول على كرتين من

$$\bar{A} \cap B = \{B_0B_2\ ;\ B_2B_0\}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

حساب: $P(\bar{A} \cup B)$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$= \left(1 - \frac{22}{30}\right) + \frac{12}{30} - \frac{2}{30} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

③ القيم الممكنة لـ X:

$$X = \{1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \beta-3\ ;\ \beta-2\ ,\ \beta-1\ ,\ \beta\ ,\ \beta+1\}$$

1: N_BN_{B+1} ; B_0B_1 ; B_1B_0 ; B_2B_1 ; B_1B_2 ; B_2B_2 ; R_3B_2 ; B_2R_3

2: B_0B_2 ; B_2B_0 ; B_1R_3 ; R_3B_1

3: B_0R_3 ; R_3B_0

$\beta-3$: $N_\beta R_3$; R_3N_β

$\beta-2$: $N_\beta B_2$; B_2N_B ; $N_{\beta+1}R_3$; $R_3N_{\beta+1}$

$\beta-1$: $N_\beta B_1$; B_1N_B ; $N_{\beta+1}B_2$; $B_2N_{\beta+1}$

β: N_BB_0 ; B_0N_B ; $N_{B+1}B_1$; B_1N_{B+1}

$\beta+1$: $N_{B+1}B_0$; B_0N_{B+1}

صفحة الأستاذ فغلول للرياضيات

- تعيين قانون الاحتمال

$$P(X=1) = \frac{8}{30}\ ;\ P(X=2) = \frac{4}{30}$$

$$P(X=3) = \frac{2}{30}\ ;\ P(X=\beta-3) = \frac{2}{30}$$

$$P(X=\beta-2) = \frac{4}{30}\ ;\ P(X=\beta-1) = \frac{4}{30}$$

$$P(X=\beta) = \frac{4}{30}\ ;\ P(X=\beta+1) = \frac{2}{30}$$

⑤ بيان أن: $E(X) = \frac{18\beta+3}{15}$

$$P(X^3-(2\beta+1)X^2+(\beta^2+2\beta-1)X+1-\beta^2)$$

$$= P(X=1)+P(X=\beta-1)+P(X=\beta+1)$$

$$= \frac{8}{30}+\frac{4}{30}+\frac{2}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

حل التمرين الثالث :

بيان أن G_t موجودة مهما كان $t\in[0,1]$:

$$t^2+(1-t)^2+2t(1-t)\neq 0$$

$$t^2+1^2+t^2-2t+2t-2t^2\neq 0$$

$$1^2\neq 0$$

إذن مهما كان $t\in[0,1]$ فإن G_t موجودة

(b) بيان أن :

نستعمل علاقة الإرجاع وسانيرجا

$$\overrightarrow{AG_t}=\frac{(1-t)^2}{1}\overrightarrow{AB}+\frac{2t(1-t)}{1}\overrightarrow{AC}$$

أو يمكن الكتابة :

G_t مرجح الجملة مثلا :

$$t^2\overrightarrow{G_tA}+(1-t)^2\overrightarrow{G_tB}+(2t(1-t))\overrightarrow{G_tC}=\vec{0}$$

أي : $t^2\overrightarrow{G_tA}+(1-t)^2\overrightarrow{G_tA}+(1-t)^2\overrightarrow{AB}$

$$+(2t(1-t))\overrightarrow{G_tA}+(2t(1-t))\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

أي : $(t^2+(1-t)^2+2t(1-t))\overrightarrow{G_tA}+(1-t)^2\overrightarrow{AB}$

$$+2t(1-t)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$1\overrightarrow{G_tA}+(1-t)^2\overrightarrow{AB}+2t(1-t)\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AG_t}=(1-t)^2\overrightarrow{AB}+2t(1-t)\overrightarrow{AC}$$

- إحداثيات النقطة G_t :

$$G_t\left((1-t)^2;2t(1-t)\right).$$

$$E(X)=\frac{1\times 8+2\times 4+2\times 3+(\beta-3)2+(\beta-2)4}{30}$$

$$+\frac{(\beta-1)4+\beta(4)+(\beta+1)2}{30}$$

$$=\frac{22+2\beta-6+4\beta-8+4\beta-4+4\beta+2\beta+2}{30}$$

$$=\frac{16\beta+6}{30}=\frac{2(8\beta+3)}{30}=\frac{8\beta+3}{15}$$

- تعيين قيمة العدد الحقيقي β :

$$E(39X+1447)=1954$$

$$39E(X)+1447=1954$$

$$39\left(\frac{8\beta+3}{15}\right)=507$$

حل المعادلة هو : $\beta=24$

(c) حساب :

$$P(X^3-(2\beta+1)X^2+(\beta^2+2\beta-1)X+1-\beta^2=0)$$

نلاحظ أنه يوجد حل هو 1 :

$$\begin{array}{l|l} X^3-(2\beta+1)X^2+(\beta^2+2\beta-1)X+1-\beta^2 & x-1 \\ \hline -X^3+X^2 & X^2-2\beta x+\beta^2-1 \\ \hline -2\beta X^2+(\beta^2+2\beta-1)X & \\ 2\beta X^2-2\beta X & \\ \hline (\beta^2-1)X+(1-\beta^2) & \\ (\beta^2-1)X+(1-\beta^2) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

حل المعادلة :

$$X^2-2\beta X+\beta^2-1=0$$

$$\Delta=4\beta^2-4(\beta^2-1)=4$$

$$X=\frac{2\beta-2}{2(1)}=\beta-1$$

أو

$$X=\frac{2\beta+2}{2}=\beta+1$$

وبالتالي :

صفحة الأستاذ فضلول للرياضيات

- استنتاج قيمة العدد الحقيقي t :

قيمة حدية محلية للدالة f عند $\frac{1}{2}$ من أجل $x = \frac{1}{4}$ و منه $(1-t)^2 = \frac{1}{4}$

$1-t = \frac{1}{2}$ أي $\sqrt{(1-t)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}}$ ($1-t > 0$)

أي $t = \frac{1}{2}$

③ بيان أن: $\overrightarrow{AG_t} = (1-t^2)\overrightarrow{AD_t}$

D_t مرجح الجملة $\{(B,1-t),(C,2t)\}$ معناه:

$(1-t)\overrightarrow{D_tB} + 2t\overrightarrow{D_tC} = \vec{0}$

لدينا:

$\overrightarrow{AG_t} = (1-t)^2\overrightarrow{AB} + 2t(1-t)\overrightarrow{AC}$

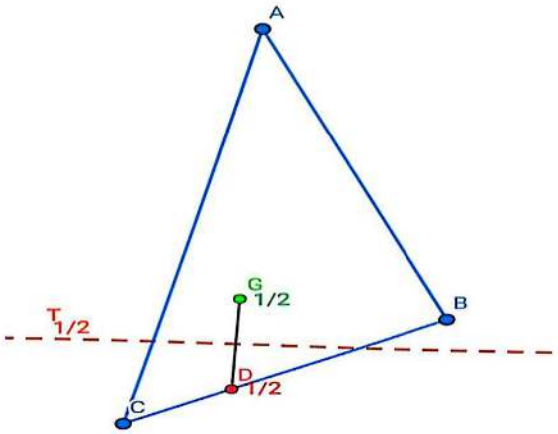
$= (1-t)^2\overrightarrow{AD_t} + (1-t)^2\overrightarrow{D_tB} + 2t(1-t)\overrightarrow{AD_t} + 2t(1-t)\overrightarrow{D_tC}$

$= [(1-t)^2 + 2t(1-t)]\overrightarrow{AD_t} + (1-t)^2\overrightarrow{D_tB} + 2t(1-t)\overrightarrow{D_tC}$

$= (1-t^2)\overrightarrow{AD_t} + (1-t)\underbrace{[(1-t)\overrightarrow{D_tB} + 2t\overrightarrow{D_tC}]}_{=\vec{0}}$

$= (1-t^2)\overrightarrow{AD_t}$.

انشاء النقطتين $G_{1/2}$ و $D_{1/2}$:



④ قيمة t حتى تنتمي G_t الى المستقيم (AC) معناه $y = x$

أي: $2t(1-t) = (1-t)^2$

$2t(1-t) - (1-t)^2 = 0$

$(1-t)(2t-(1-t)) = 0$

ومنه: $t = 1$ أو $t = \frac{1}{3}$

ⓐ مجموعة النقط G_t:

صفحة الاستاذ فعلول للرياضيات

$\begin{cases} x = (1-t)^2 & (1) \\ y = 2t(1-t) & (2) \end{cases}$

حسب العلاقة (1) لدينا:

$x = (1-t)^2$ أي $\sqrt{x} = |(1-t)|$ ($1-t > 0$)

أي $t = 1 - \sqrt{x}$ ...

نعوض t في y أو العلاقة (2):

$y = 2(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$

$y = 2(\sqrt{x} - x)$

وبالتالي مجموعة النقط G_t هي منحنى معادلته: $y = 2(\sqrt{x} - x)$

⑤ دراسة تغيرات الدالة f

$f'(x) = 2\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 2$ مع $x \neq 0$

ندرس اشارة المشتقة:

$f'(x) = 0$ معناه: $\frac{1}{\sqrt{x}} - 2 = 0$ مع $x \neq 0$.

أي: $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2$ أي $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$ أي $x = \frac{1}{4}$

جدول التغيرات:

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

⑥ قيمة t: $t^2 + (1-t)^2 + 2t(1-t) = \frac{4(1-t)}{3}(1-t+2t)$

حل المعادلة: $t = 0$ أو $t = -0,1$

مقبول مرفوض