

الواجب المنزلي رقم (06)

(النهايات والسلوك التقاربي)

الأستاذ: قويسم الخليل



المستوى: ثانوية ثانوي الشعب العلمية



يُعاد يوم: 29 / 01 / 2025



سلم يوم: 22 / 01 / 2025



التمرين 01

- احسب النهايات التالية (وفسر النتائج هندسيا إن وجدت تفسيرات):

$$l_1 = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x(x-2)} \right)$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x} \right)$$

$$l_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right)$$

$$l_4 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \right)$$

التمرين 02

f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ بـ: $f(x) = \frac{(1+x)(1-x)^2}{2+x}$ و h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^2 - 3x + 5$

1 عيّن العدد الحقيقي α بحيث من أجل كل $x \neq -2$ يكون: $f(x) = h(x) + \frac{\alpha}{2+x}$

2 احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

التمرين 03

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 + 6x + 12$

و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

حيث (C_g) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ في النقطة ذات الفاصلة α

حيث: $-1.48 < \alpha < -1.47$

• بقراءة بيانية حدد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

(II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في

مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1 أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

ب- بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 2)^2}$

ج- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2 أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

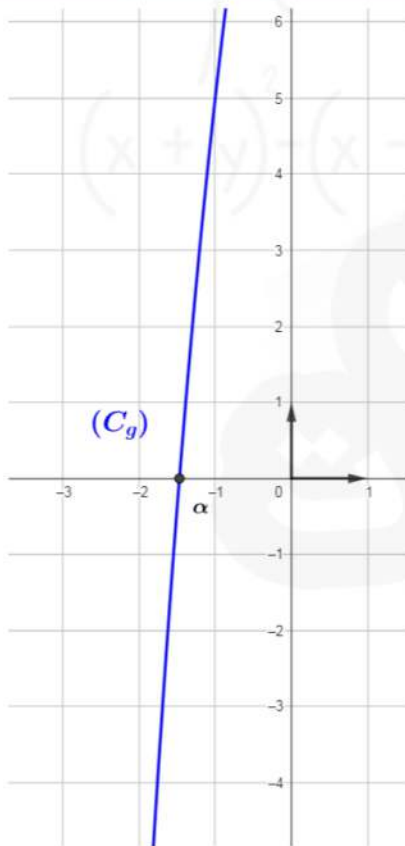
3 بيّن أن: $\alpha = 0$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4 مثل بيانيا (Δ) و (C_f) (خذ $f(1.8) \approx 0$)

5 ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$x^3 + mx^2 + 2m - 6 = 0$$

امسح الرمز لمشاهدة الحل



الواجب المنزلي رقم (06)

(النهايات والسلوك التقاربي)

الأستاذ: قويسم الخليل



المستوى: ثانية ثانوي الشعب العلمية



✓ تصحيح التمرين 01:

- حساب النهايات:

$$\begin{aligned}
 \bullet l_1 &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x(x-2)} \right) \\
 &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 2x} \right) \\
 &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} \right) \\
 &= [2]
 \end{aligned}$$

التفسير الهندسي: منحنى الدالة $x \mapsto \frac{2x^2+1}{x(x-2)}$ يقبل مستقيم مقارب موازي لحامل محور الفواصل معادلته: $y = 2$

$$\begin{aligned}
 \bullet l_2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{-x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) \\
 &= [-\infty]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet l_3 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x - 0} \right) \\
 \left\{ \begin{aligned} f'(x) &= -\sin x \\ f'(1) &= -\sin 0 = 0 \end{aligned} \right. & \text{نضع: } \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f(0) &= \cos 0 = 1 \end{aligned} \right. \text{ومنه:}
 \end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned}
 l_3 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x - 0} \right) \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) \\
 &= -f'(0) = [0]
 \end{aligned}$$

$$\text{(II)} \bullet l_4 = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x) \\ f(1) &= \sin(\pi(1)) = 0 \end{aligned} \right. & \text{نضع:} \\
 \left\{ \begin{aligned} f'(x) &= \pi \cos(\pi x) \\ f'(1) &= \pi \cos(\pi(1)) = -\pi \end{aligned} \right. & \text{ومنه:}
 \end{aligned}$$

وعليه:

$$\begin{aligned}
 l_4 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sin(\pi x)}{x - 1} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) \\
 &= f'(1) = [-\pi]
 \end{aligned}$$

✓ تصحيح التمرين 02:

$$\text{1} \text{ تعيين } a \text{ حتى يكون: } f(x) = g(x) + \frac{a}{x+2}$$

من أجل كل $x \neq -2$ لدينا:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x^2 - 2x + 1)(x + 1)}{x^3 - 2x^2 + x + x^2 - 2x + 1} \\
 &= \frac{x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} \\
 &= \frac{x + 2}{x + 2}
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= g(x) + \frac{a}{x+2} \\
 &= x^2 - 3x + 5 + \frac{a}{x+2} \\
 &= \frac{(x^2 - 3x + 5)(x + 2) + a}{x + 2} \\
 &= \frac{x^3 - x^2 - x + 10 + a}{x + 2}
 \end{aligned}$$

بالمطابقة نجد: $10 + a = 1$

$$\boxed{a = -9} \text{ ومنه:}$$

$$f(x) = g(x) - \frac{9}{x+2} \text{ إذن:}$$

$$\text{2} \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-\frac{9}{x+2} \right] = 0$$

تفسير النتيجة هندسيا:

المنحنى الممثل للدالة f والمنحنى الممثل للدالة g متقاربان بجوار $+\infty$ و $-\infty$

✓ تصحيح التمرين 03:

(I) تعيين إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) 1

أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty \\
 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty
 \end{aligned}$$

ب- حساب $f'(x)$:لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(3x^2)(x^2 + 2) - (2x)(x^3 - 6)}{(x^2 + 2)^2} \\
 &= \frac{x(x^3 + 6x + 12)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x \times g(x)}{(x^2 + 2)^2}
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
x	-		0	+
$g(x)$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+

جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	-3	$+\infty$

2 أ- تبيان أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

$$\begin{aligned}\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x] &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} - x \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 6 - x^3 - 2x}{x^2 + 2} \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-6 - 2x}{x^2 + 2} \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2x}{x^2} \right) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{x} \right) = 0\end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا من أجل كل x حقيقي: $f(x) - x = \frac{-2x - 6}{x^2 + 2}$

لدينا: $(x^2 + 2) > 0$ ومنه الإشارة من $(-2x - 6)$:

لدينا: $-2x - 6 = 0$ ومنه: $-2x = 6$

ومنه: $x = -3$ وعليه:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$
الوضعية	فوق (C_f) (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	تحت (C_f) (Δ)

3 تبيان أن: $f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}f(\alpha) - \frac{3}{2}\alpha &= \frac{\alpha^3 - 6}{\alpha^2 + 2} - \frac{3}{2}\alpha \\ &= \frac{-(\alpha^3 + 6\alpha + 12)}{\alpha^2 + 2} \\ &= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2 + 2} = 0\end{aligned}$$

حصص $f(\alpha)$:

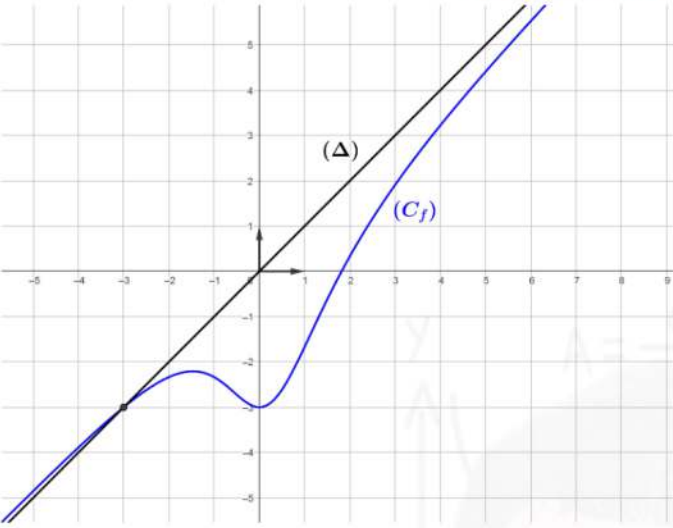
لدينا: $-1.48 < \alpha < -1.47$

ولدينا: $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$

ومنه: $\frac{3}{2}(-1.48) < \frac{3}{2}\alpha < \frac{3}{2}(-1.47)$

ومنه: $-2.22 < f(\alpha) < -2.21$

4 إنشاء (Δ) و (C_f) :



5 المناقشة البيانية:

لدينا: $x^2(x - m) = 2(m + 3)$

ومنه: $x^3 - mx^2 = 2(m + 3)$

ومنه: $x^3 - mx^2 = 2m + 6$

ومنه: $x^3 - 6 = mx^2 + 2m$

ومنه: $x^3 - 6 = m(x^2 + 2)$

ومنه: $\frac{x^3 - 6}{x^2 + 2} = m$

ومنه: $f(x) = m \dots (E)$

إذن حلول المعادلة $f(x) = m$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$ ، وهي:

لما: $m < -3$ (E) حل سالب تماما

لما: $m = -3$ (E) حل معدوم وحل سالب تماما

لما: $-3 < m < f(\alpha)$ (E) حل موجب تماما وحلان سالبان تماما

لما: $m = f(\alpha)$ (E) حل موجب تماما وحل سالب تماما

لما: $m > f(\alpha)$ (E) حل موجب تماما



نشر يوم: 30 جانفري 2025

كتبه الأستاذ: قويسم الخليل