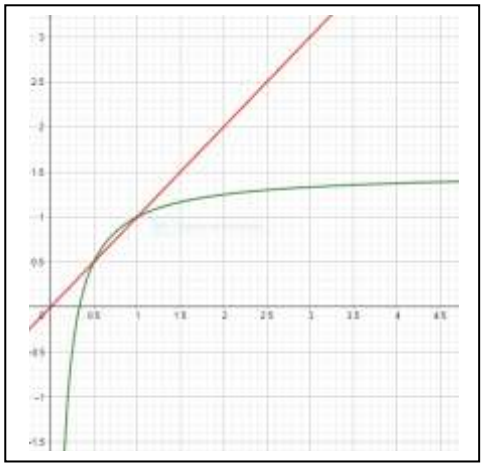
وزارة التربية الوطنية	مديرية التربية لولاية غليزان
ثانوية محمد الحسين بن زيان – وادي الجمعة -	السنة الدراسية 2025/2024

فرض الثلاثي الثاني

الشعبة: 3علوم تجريبية 2	مادة الرياضيات	المدة: ساعة

عالج تمرين من التمرينين

التمرين الأول :



1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$

بـ : $f(x)=\frac{3x-1}{2x}$.

و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y=x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

2) نعرف المتتالية (u_n) كما يلي : $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم (Δ) مثل الحدود u_0 , u_1 و u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n>1$.

جـ) بين أن (u_n) متناقصة تماما .ماذا تستنتج ؟ أحسب نهايتها .

3) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$.

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

جـ) استنتج مرة أخرى $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

5) أحسب S_n بدلالة n حيث : $S_n=\frac{v_0-1}{u_0}+\frac{v_1-1}{u_1}+\frac{v_2-1}{u_2}+\ldots+\frac{v_n-1}{u_n}$

التمرين الثاني : الأجزاء I II III منفصلة

I. (w_n)متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} w_1 + w_3 = 30e \\ \ln(w_2) - \ln(w_4) + 2\ln 3 = 0 \end{cases}$.

أ) عين w_0 و أساس q .

ب) عبر w_n عن بدلالة n.

II. نعتبر المتتاليتين (u_n)و (v_n) المتتالية المعرفتان على بـ: $v_n = \dfrac{u_n + \alpha}{u_n + 1}$ ، $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{4}{u_n + 2} \end{cases}$

جد قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n)متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$

III. نعتبر المتتالية (u_n)المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_0 = 1$ ، $3u_{n+1} = 2u_n + n + 3$.

1. أحسب الحدود u_1 , u_2 و u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n + 3$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3. لتكن المتتالية (v_n)المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n - n$

أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n .

ت) عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماهي نهايتها ؟

4. - أحسب S_n بدلالة n حيث : $S_n = (u_0)^2 + (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 + ... + (u_n - n)^2$

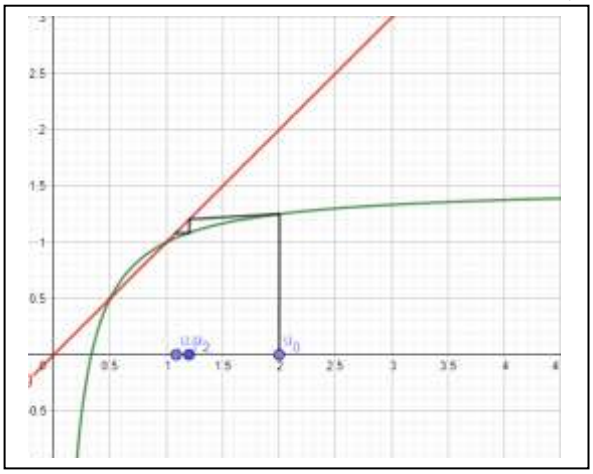
- أحسب S'_n بدلالة n حيث : $S'_{112} = Ln(v_7 \times v_8 \times .....v_{112})$

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية غليزان

ثانوية محمد الحسين بن زيان – وادي الجمعة - — السنة الدراسية 2025/2024

الحل النموذجي لفرض الثلاثي الثاني

الشعبة: 3علوم تجريبية 2 — مادة الرياضيات — الأستاذة : جلام

الأجابة	التنقيط
التمرين الأول :	20
1.دراسة إتجاه تغير الدالة f **على المجال** $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ و من أجل كل $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$: $f'(x)=\frac{1}{2x^2}$ من أجل كل $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ ، $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$	01
2. (u_n) **متتالية حيث:** $u_0=2$ **ومن أجل كل عدد طبيعي** n , $u_{n+1}=f(u_n)$ **أ/ تمثيل الحدود** u_0 , u_1 و u_2 **على محور الفواصل :** لدينا : $M_0(u_0,u_1)$ أي $M_0(1,u_1)$ نسقط M_0 على (Δ) وفق (ox) , ثم نسقط النقطة المحصل عليها على (C) وفق (oy) فنحصل على M_1 وهكذا نكرر نفس العملية فنحصل على M_2 	01
التخمين : بما أن $u_0>u_1>u_2$ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ومتقاربة **ب) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي** n $u_n>1$: نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n>1$ ❶ من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=2$ و $2>1$ ومنه $p(0)$ صحيحة . ❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n>1$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}>1$ لدينا $u_n>1$ ومنه $f(u_n)>f(1)$ حسب السؤال(1-)لأن f متزايدة تماما أي $u_{n+1}>1$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n	01 02
جـ. تبيان أن (u_n) **متناقصة تماما** من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n-1}{2u_n}-u_n=\frac{3u_n-1-2u^2{}_n}{2u_n}$ $=\frac{-2(u_n-1)\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{2u_n}$ - ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n>1$ وبالتالي $2u_n>0$ - ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n>1$ وبالتالي $u_n>\frac{1}{2}$ ومنه $u_n-\frac{1}{2}>0$ - ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n>1$ وبالتالي $u_n-1>0$	02

ومنه $\frac{-2(u_n-1)\left(u_n-\frac{1}{2}\right)}{2u_n}<0$ أي $u_{n+1}-u_n<0$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

/ استنتاج:

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فإن (u_n) متقاربة — **01**

حساب نهايتها :

بما أن (u_n) متقاربة فإن من أجل كبير بقدر الكافي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{n+1}=\ell$ — **01**

أي أن $\ell=\frac{3\ell-1}{2\ell}$ ومنه $3\ell-1=2\ell^2$ ومنه $3\ell-1-2\ell^2=0$ نحل المعادلة نجد $\ell=1$ أو $\ell=\frac{1}{2}$ مرفوض لأن $u_n>1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

3.أ . اثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$ — **01**

$$u_{n+1}-1=\frac{3u_n-1}{2u_n}-1=\frac{3u_n-1-2u_n}{2u_n}=\frac{u_n-1}{2u_n}$$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n>1$ وبالتالي $\frac{1}{u_n}<1$ ومنه $\frac{1}{2u_n}<\frac{1}{2}$ ومنه $\frac{u_n-1}{2u_n}<\frac{1}{2}(u_n-1)$ إذن $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$

ب . تبيان أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

❶ من أجل $n=0$ لدينا : $u_0-1=2-1=1$ و $u_0-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^0$

ومنه $p(0)$ صحيحة . — **02**

❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا (3.أ) $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}(u_n-1)$ ومن الفرض التراجع لدينا $u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ فإن $u_{n+1}-1\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي أن $u_{n+1}-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ أي أن

$p(n+1)$ صحيحة

اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

استنتاج $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$:

لدينا $0<u_n-1\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-1=0$ أي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ — **01**

4.المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n=\frac{u_n-1}{2u_n-1}$

أ / البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية :

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : — **02**

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}=\frac{\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}{2\frac{3u_n-1}{2u_n}-1}=\frac{\frac{u_n-1}{2u_n}}{\frac{4u_n-2}{2u_n}}=\frac{u_n-1}{4u_n-2}=\frac{u_n-1}{2(2u_n-1)}=\frac{1}{2}\times\frac{u_n-1}{(2u_n-1)}=\frac{1}{2}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0=\frac{u_0-1}{2u_0-1}=\frac{1}{3}$

ب / كتابة عبارة v_n بدلالة n — **01**

$$v_n=v_0\times q^n=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3\times2^n}$$

01	* استنتاج u_n بدلالة n $v_n=\dfrac{u_n-1}{2u_n-1}$ تكافئ $v_n(2u_n-1)=u_n-1$ تكافئ $u_n(2v_n-1)=v_n-1$ تكافئ $u_n=\dfrac{v_n-1}{2v_n-1}$ ومنه $u_n=\dfrac{\frac{1}{3\times 2^n}-1}{2\frac{1}{3\times 2^n}-1}=\dfrac{1-3\times 2^n}{2-3\times 2^n}$
01	ج) حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{3\times 2^n}-1}{2\frac{1}{3\times 2^n}-1}=1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$
02	5.حساب S_n بدلالة n حيث $S_n=\dfrac{v_0-1}{u_0}+\dfrac{v_1-1}{u_1}+\dfrac{v_2-1}{u_2}+\ldots+\dfrac{v_n-1}{u_n}$ نضع (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $w_n=\dfrac{v_n-1}{u_n}$ ومنه $w_n=\dfrac{v_n-1}{\frac{v_n-1}{2v_n-1}}$ ومنه $w_n=2v_n-1$ ومنه $S_n=\dfrac{v_0-1}{u_0}+\dfrac{v_1-1}{u_1}+\dfrac{v_2-1}{u_2}+\ldots+\dfrac{v_n-1}{u_n}$ تكافئ $S_n=2v_0-1+2v_1-1+2v_2-1+\ldots+2v_n-1$ تكافئ $S_n=2(v_0+v_1+v_2+\ldots+v_n)-1-1\ldots-1$ ومنه $S_n=2\times\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)-1(n+1)$ إذن $S_n=\dfrac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)-1(n+1)$
20	**التمرين الثاني** : الأجزاء I و II و III منفصلة
02	I. متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases}w_1+w_3=30e\\ \ln(w_2)-\ln(w_4)+2\ln 3=0\end{cases}$. أ)تعيين w_0 و أساس q . بما أن (w_n) متتالية هندسية فإن $w_n=w_0q^n$ و منه $w_1=w_0q$ ، $w_2=w_0q^2$ ، $w_3=w_0q^3$ ، $w_4=w_0q^4$ تكافئ $\begin{cases}w_0q+w_0q^3=30e\\ \ln(w_0q^2)-\ln(w_0q^4)+2\ln 3=0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}w_0(q+q^3)=30e\\ \ln\left(\dfrac{w_0q^2}{w_0q^4}\right)=-2\ln 3\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}w_1+w_3=30e\\ \ln(w_2)-\ln(w_4)+2\ln 3=0\end{cases}$
01	نحل المعادلة (2) نجد $q=3$ أو $q=-3$ وبما أن (w_n) متتالية هندسية $\begin{cases}w_0(q+q^3)=30e & \ldots(1)\\ -2\ln\lvert q^2\rvert=-2\ln 3 & \ldots(2)\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}w_0(q+q^3)=30e\\ \ln\left(\dfrac{1}{q^2}\right)=-2\ln 3\end{cases}$ حدودها موجبة تماما فإن $q=3$ وبتعويض في المعادلة (1) نجد $w_0=e$ ب) w_n عن بدلالة n . $w_n=w_0q^n=e\times 3^n$
02	II. نعتبر المتتالية (u_n) و (v_n) المتتالية المعرفتان على بـ : $\begin{cases}u_0=\dfrac{1}{2}\\ u_{n+1}=3-\dfrac{4}{u_n+2}\end{cases}$ ، $v_n=\dfrac{u_n+\alpha}{u_n+1}$ حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\dfrac{1}{4}$ فإن $\ldots(1)$ $v_{n+1}=\dfrac{1}{4}v_n=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{u_n+\alpha}{u_n+1}$ ومن جهة ومنه $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}+\alpha}{u_{n+1}+1}=\dfrac{\frac{3u_n+2}{u_n+2}+\alpha}{\frac{3u_n+2}{u_n+2}+1}=\dfrac{\frac{(3+\alpha)u_n+2+2\alpha}{u_n+2}}{\frac{4u_n+4}{u_n+2}}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{(3+\alpha)u_n+2+2\alpha}{u_n+1}$

	$v_{n+1}=\frac{1}{4}\times\frac{(3+\alpha)u_n+2+2\alpha}{u_n+1}$ ...(2) بالمطابقة بين (1) و (2) نجد $\alpha=-2$
02	I. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_0=1$ ، $3u_{n+1}=2u_n+n+3$. 1.حساب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 و تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) . لدينا : $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$ $u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=\frac{89}{27}$ ، $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=\frac{22}{9}$ ، $u_1=\frac{2}{3}u_0+\frac{0}{3}+1=\frac{5}{3}$ بما أن $u_0<u_1<u_2$ فإن (u_n) متزايدة تماما
02	2.أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n\le n+3$ نسمي $p(n)$ الخاصية : $u_n\le n+3$ ❶ من أجل $n=0$ لدينا : $u_0=1$ و $1<3$ ومنه $p(0)$ صحيحة . ❷ نفرض أن $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n\le n+3$ ونبرهن صحة $p(n+1)$ أي $u_{n+1}\le n+4$ لدينا $u_n\le n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\le\frac{2}{3}n+2$ ومنه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\le\frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$ ومنه $u_{n+1}\le n+3\le n+4$ أي $u_{n+1}\le n+4$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة اذن $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n
02	ب)دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) . من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n\le n+3$ ومنه $-u_n\ge -n-3$ ومنه $n+3-u_n\ge 0$ ومنه $\frac{1}{3}(n+3-u_n)\ge 0$ أي $u_{n+1}-u_n\ge 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .
02	3.لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n=u_n-n$ أ / البرهان على أن (v_n) متتالية هندسية : من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $v_{n+1}=u_{n+1}-n-1=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-n+1$ $=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0=u_0-0=1$
01	ب / كتابة عبارة v_n بدلالة n $v_n=v_0\times q^n=1\times\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$
01	* استنتاج u_n بدلالة n $v_n=u_n-n$ تكافئ $u_n=v_n+n$ ومنه $u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$
01	ت/ نهاية المتتالية (u_n) $\lim u_n=\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n+n=+\infty$ لأن $\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n$
01	4. حساب S_n بدلالة n حيث : $S_n=(u_0)^2+(u_1-1)^2+(u_2-2)^2+\ldots+(u_n-n)^2$ بوضع $S_n=(u_0)^2+(u_1-1)^2+(u_2-2)^2+\ldots+(u_n-n)^2$ و منه $t_n=(u_n-n)^2=v^2{}_n=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)^2=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^n$

01.5	$\left(t_n\right)$ متتالية هندسية أساسها $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ و حدها الأول $\mathbf{t_0=1}$ و منه $\mathbf{S_n=t_0\left(\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{9}}\right)=\frac{9}{5}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)}$
01.5	- حساب S'_n بدلالة n حيث : $S'_{112}=Ln\left(v_7\times v_8\times .....v_{112}\right)$ $S'_{112}=Ln\left(v_7\times v_8\times .....v_{112}\right)=S'_{112}=Ln\left(v_0q^7\times v_0q^8\times .....v_0q^{112}\right)$ $=Ln\left(q^{7+8+....+112}\right)=Ln\left(q^{53(7+112)}\right)=6307Ln\frac{2}{3}$