الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية العقيد عواشرية محمد — مديرية التربية لولاية عنابة

القسم: 3 رياضي — السنة الدراسية : 2025/2024

الفرض الثالث في مادة الرياضيات — المدة: 1سا و نصف

التمرين الأول :(10نقاط)

I. نعتبر المتتالية العددية (t_n) المعرفة بحدها الأول $t_0=\sqrt{\frac{\pi}{4}+4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $t_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}t_n^2+2}$.

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n=t_n^2-4$.

1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

2) اكتب بدلالة n عبارة v_n ، ثم استنتج عبارة t_n بدلالة n.

3) اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n=t_0^2+t_1^2+...+t_n^2$.

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0=\frac{\sqrt{2}}{2}$، ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le 1$.

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3) استنتج أن (u_n) متقاربة،.

4) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|u_{n+1}-1|\le\frac{1}{2}|u_n-1|$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $|u_n-1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n)

5) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n=\cos(v_n)$.

ب. استنتج القيمة المضبوطة للعدد الحقيقي $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

التمرين الثاني : (10نقاط)

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $u_n=\int_{-1}^{1}\left(\frac{2|x|}{3}+\frac{e^{-2n|x|}}{3}\right)dx$

1) بين من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_n>0$

2) بين من أجل كل عدد طبيعي n أن : $u_n=2\int_{0}^{1}\left(\frac{2x}{3}+\frac{e^{-2nx}}{3}\right)dx$

3) برهن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}\int_{0}^{1}e^{-2(n+1)x}(1-e^{2x})\,dx$

4) استنتج إشارة $u_{n+1}-u_n$ ثم اتجاه تغير المتتالية

- هل المتتالية (u_n) متقاربة .؟ علل اجابتك

5) اكتب عبارة u_n بدلالة n ثم عين نهاية المتتالية (u_n) .

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $v_n = 2n\,u_n$

1) اكتب عبارة v_n بدلالة n .

2) المتتالية العددية (w_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعبارة : $w_n = v_n - \frac{4n}{3} - \frac{2}{3}$

أ) عين عبارة w_n بدلالة n . ثم بين أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعين أساسها

ب) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2$

ج) من أجل كل عدد طبيعي n , نضع $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

- احسب S_n بدلالة n , ثم استنتج S'_n بدلالة n

.

بالتوفيق للجميع