الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — **الموسم الدراسي: 2024م-2025م**

ثانوية راشدي محمد -سيدي معروف — **المستوى: الثالثة -رياضيات**

الفرض الأول للفصل الثاني في مادة الرياضيات — **المدة: ساعتان**

نص التمرين:

I/ عين عبارة الدالة f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $2y'' + y' - 1 = 0$ الذي يحقق: $f(2) = 2$ و $f'(2) = 0$.

II/ نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$ ،
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1/ أُدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ ا/ بين أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

ب/ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

3/ ا/ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x$.

ب/ أُحسب $f(6)$ ثم أنشئ بدقة كلا من (D) و (Δ) و (C_f) . (وحدة الطول $2\,cm$)

4/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $(f(x))^2 = 4e^{-x+2} + (x-2)^2 + 4(x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}$.

ب/ بيّن أنّ: $\int_0^2 (4e^{-x+2} + (x-2)^2)\,dx = 4e^2 - \frac{4}{3}$.

ج/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ: $\int_0^2 (x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}dx = -4$.

د/ استنتج بـ cm^3 الحجم المولد بدوران المنحنى (C_f) حول محور الفواصل على المجال $[0;2]$.

III/ نعرّف متتالية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2e^{-\frac{1}{2}u_n+1} + u_n - 2$.

1/ ا/ مثّل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

2/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 6$.

3/ أُدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة وعيّن نهايتها.

IV/ نعتبر n عددا طبيعيا. نضع: $A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}dx$ ، ونعرّف متتالية (v_n) على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = A(n) - 4e$.

1/ أُكتب $A(n)$ بدلالة n وأعط تفسيره الهندسي، ثم أُحسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$.

2/ بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1}dx \geq 0$ ثم استنتج رتابة المتتالية (v_n) .

3/ بيّن أن (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول.

4/ ا/ أُحسب بدلالة n العدد I_n بحيث: $I_n = \int_0^n (x-2)dx$.

ب/ أُحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \cdots + \int_0^n f(x)dx$.

(**إرشاد:** من أجل كل عدد طبيعي n : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

ثانوية الشهيد محمد سيدي معروف — الموسم: 2024/2025

المستوى: 03 رياضيات

إجابة الفرض الأول الفصل الثاني

(I) تعيين عبارة f ذات الخاص المعادلة

المعادلة مثلية $2y'' + y' - 1 = 0$

معناه: $y'' = -\frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}$

إذن: $f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + 1$ (0,1) $(C_1 \in \mathbb{R})$

بما أن: $f'(2) = 0$ معناه: $C_1 e^{-1} + 1 = 0$

أي $C_1 = \frac{-1}{e^{-1}} = -e$ (0,25) ومنه

$f'(x) = -e e^{-\frac{1}{2}x} + 1 = -e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1$.

ومنه: $f(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2$ (0,1)

$(C_2 \in \mathbb{R})$

$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x + C_2$

وبما أن: $f(2) = e$ معناه: $2e^0 + 2 + C_2 = 2$

ومنه: $C_2 = -2$ (0,25)

إذن: $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$

(II) $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$ / $D_f = \mathbb{R}$

1- دراسة تغيرات الدالة f:

• النهايات:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2\right)$ (0,25)

$= +\infty$

[لأن: $\lim_{x \to +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = \lim_{t \to -\infty} 2e^t = 0$]

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2\right)$

$= \lim_{x \to -\infty} x\left(2\frac{e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x} + 1 - \frac{2}{x}\right)$

$= +\infty$ (0,25)

لأن: $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$ و

$\lim_{x \to -\infty} 2\frac{e^{-\frac{1}{2}x+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(-e \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{-\frac{1}{2}x}\right)$

$= \lim_{t \to +\infty} \left(-e\frac{e^t}{t}\right) = -\infty$

• اتجاه التغير: لما x من $\mathbb{R}$ كل أن: دراسة إشارة $f'(x)$:

$f'(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x+1} + 1 = 1 - e^{-\frac{1}{2}x+1}$ (0,1)

ولدينا:

$1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$	$1 - e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0$
$1 > e^{-\frac{1}{2}x+1}$ معناه:	$1 = e^{-\frac{1}{2}x+1}$ معناه:
$0 > -\frac{1}{2}x + 1$ أي	$0 = -\frac{1}{2}x + 1$ أي
$-1 > -\frac{1}{2}x$ ومنه	$x = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$ أي:
$2 < x$ أي	(0,1)

وبالتالي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

(0,25) الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty, 2]$ ومتزايدة تماما على $[2, +\infty[$.

2- أ) تبيان أن المستقيم $(D): y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $(+\infty)$:

لدينا: $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2$

و $\lim_{x \to +\infty} 2e^{-\frac{1}{2}x+1} = 0$ (0,1)

إذن المستقيم $(D): y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- الوضعية النسبية: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) - (x-2) = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$

(0,75) إذن (C_f) يقع فوق (D)

3- أ- دراسة وضعية (C_f) و (Δ):

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) - x = 2e^{-\frac{1}{2}x+1} - 2 = 2\left(e^{-\frac{1}{2}x+1} - 1\right)$ (0,25)

Scanné avec CamScanner

$= -4e^{1} + 2\left[-2e^{-\frac{1}{2}x+1}\right]_0^2$

$= -4e + 2\left(-2e^{0} + 2e\right) = -4e - 4 + 4e$ (0,25)

$= -4$

ب- 1- حجم: $V = \int_0^2 \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 (f(x))^2 dx$ (0,25)

$= \pi \int_0^2 \left(4e^{-x+2} + (x-2)^2\right) dx + \pi \int_0^2 (x-2) e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$ (0,25)

$= \pi \left(4e^{2} - \frac{4}{3} - 4e^{2}\right)$

$V = \pi \left(4e^{2} - \frac{52}{3}\right)$ u.V (0,25)

$V = 8\pi \left(4e^{2} - \frac{52}{3}\right)$ cm³ (0,25)

III) (u_n): $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ (0,75)

أ- 1- التخمين: (0,75)

نلاحظ أن: $u_3 < u_2 < u_1 < u_0$ ، نخمن أن (u_n) متناقصة وتحقق أن $u_n > 2$ لكل n.

2- البرهان بالتراجع: (1)

نسمي $P(n)$ الخاصية: $2 \leq u_n \leq 6$.

لدينا $P(0)$ صحيحة لأن $2 \leq u_0 = 6 \leq 6$.

نفترض أن $P(k)$ صحيحة حيث k عدد طبيعي، ونبرهن أن $P(k+1)$ صحيحة.

بما أن f متزايدة على المجال $[2;6]$ فإن:

$f(2) \leq f(u_k) \leq f(6)$

بما أن $f(6) \simeq 4,27 < 6$ و $f(2) = 2 > 2$

فإن $2 \leq u_{k+1} \leq 6$ أي $P(k+1)$ صحيحة.

بما أن $P(0)$ صحيحة و $P(k)$ صحيحة $\Rightarrow P(k+1)$ صحيحة

فإن $2 < u_n \leq 6$ لكل n من $\mathbb{N}$.

$f(x) - x = -2\left(1 - e^{\frac{1}{2}x+1}\right)$ أ- 1- دراسة الوضع النسبي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في $(2;2)$		(C_f) تحت (Δ)

(0,5)

ب- 1- الإنشاء: (1)

$f(6) = 2e^{-2} + 4 \simeq 4,27$ (0,25)

* جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

(0,5)

$f(0) = 2e - 2 \simeq 3,44$

2- أ- 1- التحقق: لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$(f(x))^2 = \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + (x-2)\right)^2$ (0,25)

$= 4e^{-x+2} + (x-2)^2 + 4(x-2)e^{-\frac{1}{2}x+1}$

ب- 1- حساب التكامل:

$\int_0^2 \left(4e^{-x+2} + (x-2)^2\right) dx = \left[-4e^{-x+2} + \frac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^2$ (0,25)

(0,25) $= \left[-4e^{0} - \left(-4e^{2} - \frac{8}{3}\right)\right]$

$= -4 + 4e^{2} + \frac{8}{3} = -\frac{4}{3} + 4e^{2}$ (0,25)

2- التكامل بالتجزئة:

$\int_0^2 (x-2) e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$.

نضع $u(x) = x-2$ ، ومنه $u'(x) = 1$

و $v'(x) = e^{-\frac{1}{2}x+1}$ ، ومنه $v(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x+1}$ (0,5)

$\int_0^2 (x-2) e^{-\frac{1}{2}x+1} dx = \left[(x-2)\left(-2e^{-\frac{1}{2}x+1}\right)\right]_0^2$ وهو صحيح (0,25)

$- \int_0^2 -2e^{-\frac{1}{2}x+1} dx$

Scanné avec CamScanner

- اتجاه التغير:

$v_{n+1} - v_n = A(n+1) - 4e - A(n) + 4e$

$= \int_0^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx - \int_0^{n} 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx$ (0,5)

$= \int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx \geq 0$ (0,5)

. $\mathbb{N}$ متزايدة على (v_n) ومنه المتتالية

-3) تبيان أن (v_n) هندسية:

$v_{n+1} = A(n+1) - 4e = -4e^{-\frac{1}{2}(n+1)+1}$

$= -4e^{-\frac{1}{2}n+1} e^{-\frac{1}{2}} = v_n\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$ (0,5)

$q = e^{-\frac{1}{2}}$ إذن (v_n) هندسية أساسها (0,25)

$v_0 = A(0) - 4e = 0 - 4e$ حدها الأول

$v_0 = -4e$ (0,25)

-4) حساب I_n بدلالة n:

$I_n = \int_0^n (x-2)\,dx = \left[\frac{1}{2}(x-2)^2\right]_0^n$ (0,5)

$= \frac{1}{2}(n-2)^2 - \frac{1}{2}(-2)^2$

$= \frac{1}{2}n^2 + 2 - 2n$

$= \frac{1}{2}n^2 - 2n$.

-ج حساب S_n بدلالة n:

$S_n = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx + \dots + \int_0^n f(x)\,dx$.

$n \in \mathbb{N}$ من أجل كل

$\int_0^n f(x)\,dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx + \int_0^n (x-2)\,dx$ (0,25)

$= A(n) + I_n = v_n + 4e + I_n$

ومنه

$S_n = \left(v_1 + 4e + \frac{1}{2}(1)^2 - 2(1)\right) + \left(v_2 + 4e + \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2)\right) + \left(v_3 + 4e + \frac{1}{2}(3)^2 - 2(3)\right) + \dots + \left(v_n + 4e + \frac{1}{2}(n)^2 - 2n\right)$

$= (v_1 + v_2 + \dots + v_n) + (4e + 4e + \dots + 4e) + \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (-2 + (-4) + \dots + (-2n))$

-3) اتجاه التغير:

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$

ومنه حسب ما سبق ($f(x)-x$ إشارة الفرق)

فإنه لما $2 \leq u_n \leq 4$ (0,5)

فإن $f(u_n) - u_n < 0$

ومنه (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$. (0,25)

- إثبات أن المتتالية (u_n) متقاربة:

المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 2 (0,5)

فهي متقاربة.

- تعيين نهايتها: حل المعادلة $f(x) = x$

$x = 2$ ومنه حسب ما سبق

إذن: $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ (0,5)

-IV) $A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx$; $n \in \mathbb{N}$

$v_n = A(n) - 4e$.

-1) تبيان أن $A(n)$ بدلالة n:

$A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx = 2\left[-2e^{-\frac{1}{2}x+1}\right]_0^n$

$= 2\left(-2e^{-\frac{1}{2}n+1} + 2e\right)$ (0,5)

$A(n) = -4e^{-\frac{1}{2}n+1} + 4e$.

- تعيين الوضعية النسبية لـ (C_f) و (D):

$A(n) = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx = \int_0^2 [f(x) - (x-2)]\,dx$ لدينا

ومنه $f(x) - (x-2) > 0$ من أجل كل x من $[0;2]$ (0,5)

وبالتالي $A(n)$ تمثل مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (D) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=0$ و $x=n$.

- حساب النهاية:

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \lim_{n\to+\infty} (-4e^{-\frac{1}{2}n+1} + 4e) = 4e$ (0,5)

$\left[\lim_{n\to+\infty} -4e^{-\frac{1}{2}n+1} = \lim_{t\to-\infty} -4e^{t} = 0\right]$ لأن

-ج) إثبات أن: من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $\int_n^{n+1} 2e^{-\frac{1}{2}x+1}\,dx \geq 0$

لأن $2e^{-\frac{1}{2}x+1} > 0$ (0,5)

Scanné avec CamScanner

$$S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + (4e)n + \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) - n^2 - n$$

$$S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + \frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \left(4e - \frac{5}{6}\right)n$$

$$S_n = 1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + 4e(n) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \times \frac{1}{2} + \left(\frac{2-2n}{2}\right)(n)$$

0,75

$$S_n = -4e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-(e^{-\frac{1}{2}})^n}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right) + 4en + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - n - n^2$$

$f(6) = 2e^{-2} \simeq 3{,}44$

$f(6) = 2e^{-2} + 4 \simeq 4{,}27$

Scanné avec CamScanner

$$S_n = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx + \int_0^3 f(x)dx + \dots + \int_0^n f(x)dx .$$

f continue sur $[0;n]$, donc sur chaque $[k-1;k]$

$$\int_0^n f(x)dx = \int_0^n \left(2e^{-\frac{1}{2}x+1} + x - 2\right)dx = \int_0^n 2e^{-\frac{1}{2}x+1}dx + \int_0^n (x-2)dx .$$

$$= A(n) + I_n = \boxed{v_n + 4e + \frac{1}{2}n^2 - 2n} \quad (0,5)$$

$u_0 = 0$, $r = -2$ et (u_n) définie par $u_n = -2n$: progression arithmétique

donc

$$S_n = \left(v_1 + 4e + \frac{1}{2}(1)^2 + u_1\right) + \left(v_2 + 4e + \frac{1}{2}(2)^2 + u_2\right) + \dots$$
$$\dots + \left(v_n + 4e + \frac{1}{2}(n)^2 + u_n\right)$$

$$= \left(v_1 + v_2 + \dots + v_n\right) + \underbrace{\left(4e + 4e + \dots + 4e\right)}_{n \text{ fois}} + \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right)$$
$$+ \left(u_1 + u_2 + \dots + u_n\right)$$

$$= v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) + 4e(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \left(u_1 + u_n\right)\frac{n}{2} . \quad (0,75)$$

$v_1 = v_0 \times q$

$$= -4e\,e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1-\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^n}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right) + 4en + \frac{1}{12}(n)(n+1)(2n+1) + (-2-2n)\frac{n}{2}$$

$$\boxed{S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + 4en + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - n(n+1)}$$

$$S_n = \left(\frac{-4e^{\frac{1}{2}}}{1-e^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1-e^{-\frac{1}{2}n}\right) + \frac{1}{6}n^3 - \frac{3}{4}n^2 + \left(\frac{48e-11}{12}\right)n .$$

Scanné avec CamScanner