تقويم تشخيصي المدة: 01 سا

المستوى: ثالثة ثانوي – شعبة علوم تجريبية

إعداد: قويسم الخليل

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{2x-2}$$

حيث α و β عددين حقيقين، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

– عيّن α و β حيث يقبل (C_f) قيمة حدية عند النقطة $A(0;-1)$

II) نضع فيما يلي: $\alpha=-2$ و $\beta=2$:

❶ احسب: $\lim\limits_{x\to 1^>} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^<} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجتين هندسيا

❷ احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

❸

أ/ بيّن أنه من أجل كل x يختلف عن الـ 1 لدينا:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-2}$$

ب/ استنتج أنّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ و $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❹

أ/ بيّن أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب/ ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

❺

أ/ عيّن إحداثيات النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x=1$

ب/ بيّن أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج/ أثبت أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

❻ ارسم كل من (Δ) و (C_f)

❼ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) حيث:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+m\ldots(E)$$

III) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$$h(x)=f(|x|)$$

❶ ادرس شفعية الدالة h

❷ وضّح كيف يمكن المنحنى (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحنى (C_f) (لا يُطلب تمثيل (C_h))

الخليل للرياضيات

تصحيح نموذجي (مقترح)

I)

1 تعيين α و β حتى يقبل (C_f) قيمة حدية عند 0 وَ $f(0) = -1$:

لدينا: $f(0) = -1$ ، ومنه: $\frac{(0)^2+\alpha(0)+\beta}{2(0)-2} = -1$ ومنه: $\frac{\beta}{-2} = -1$ ومنه: $\boxed{\beta = 2}$

ولدينا: $f(0) = -1$ تقبل قيمة حدية لـ f معناه: $f'(0) = 0$

- نعيّن أولا $f'(x)$:

لدينا: f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{(2x+\alpha)(2x-2) - 2(x^2+\alpha x+\beta)}{(2x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-2\alpha-2\beta}{(2x-2)^2}$$

ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه: $\frac{2(0)^2-4(0)-2\alpha-2\beta}{(2(0)-2)^2} = 0$ ومنه: $-2\alpha-2\beta = 0$ ومنه: $\alpha = -\beta$ ومنه: $\boxed{\alpha = -2}$

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x-2}}$$

II) نضع فيما يلي: $\alpha = 1$ و $\beta = -2$:

1 حساب: $\lim\limits_{x\to 1^>} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^<} f(x)$:

- إشارة المقام:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$2x-2$	$-$	0	$+$

وعليه:

- $\lim\limits_{x\to 1^>} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^>} \left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right) = +\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to 1^>} (2x-2) = 0^+$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 1$

- $\lim\limits_{x\to 1^<} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^<} \left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right) = -\infty$

لأنّ: $\lim\limits_{x\to 1^<} (2x-2) = 0^-$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 1$

2 حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2x}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2}\right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-2x+2}{2x-2}\right)$$
$$= -\infty$$

3

أ. تعيين الأعداد الحقيقية a ، b و c :

من أجل كل $x \neq 1$ لدينا:

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{2x-2}$$
$$= \frac{(ax+b)(2x-2)+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2-2ax+2bx-2b+c}{2x-2}$$
$$= \frac{2ax^2+(2b-2a)x-2b+c}{2x-2}$$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} 2a=1 \\ 2b-2a=-2 \\ -2b+c=2 \end{cases}$ **ومنه:** $\begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \\ c=1 \end{cases}$ **، إذن:**

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-2}}$$

ب. استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $\pm\infty$:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x-2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right]$$
$$= \lim_{|x|\to+\infty}\left[\frac{1}{2x-2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ و $-\infty$ معادلته : $y_{(\Delta)}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

ج. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

من أجل كل $x \neq 1$ لدينا:

$$f(x)-y_{(\Delta)} = \frac{1}{2x-2}$$

لدينا: $2x-2=0$ **معناه:** $x=1$ **ومنه:**

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y_{(\Delta)}$	$-$	‖	$+$

ومنه:

- (C_f) **تحت** (Δ) **لما** $x \in\ ]-\infty;1[$.
- (C_f) **فوق** (Δ) **لما** $x \in\ ]1;+\infty[$.

4

أ. تبيين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}-\{1\}$ لدينا: $f'(x)=\frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$:

لدينا: f قابلة للاشتقاق على $]-\infty;1[$ و $]1;+\infty[$ حيث:

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2x-2)-2(x^2-2x+2)}{(2x-2)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 4x - 4x + 4 - 2x^2 + 4x - 4}{(2x-2)^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 4x}{(2x-2)^2}$$
$$= \frac{2x(x-2)}{(2x-2)^2}$$

ب. دراسة تغيرات الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $(2x-2)^2 > 0$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x(x-2)$:

لدينا: $2x(x-2) = 0$ تكافئ: $\begin{cases} 2x = 0 \\ \text{أو} \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} x = 0 \\ \text{أو} \\ x = 2 \end{cases}$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

5

أ. إيجاد إحداثيي النقطة ω نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المستقيم المقارب العمودي ذو المعادلة $x = 1$:

نعوض $x = 1$ في معادلة المستقيم (Δ)، نجد: $y = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}$ ومنه: $y = 0$

ومنه: $\omega(1;0)$

ب. تبيين أن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

- لدينا: $x \in D_f$

معناه: $x \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $x < 1$ أو $x > 1$

معناه: $(-x) < -1$ أو $(-x) > -1$ معناه: $(2(1)-x) < 1$ أو $(2(1)-x) > 1$

معناه: $(2(1)-x) \in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ معناه: $(2(1)-x) \in D_f$

- ولدينا:

$$f(2(1)-x) + f(x) = \frac{(2-x)^2 - 2(2-x) + 2}{2(2-x) - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= \frac{4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2}{4 - 2x - 2} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= 0\frac{x^2 - 2x + 2}{-(2x-2)} + \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$$
$$= 0$$
$$= 2(0)$$

مركز التناظر:
نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:
$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

إذن النقطة ω هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

ج. اثبات أنه لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

إذا وُجد مماس لـ (C_f) يشمل $\omega(1;0)$ معناه يوجد $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ يحقق:

$$f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$$

لدينا: $f'(a)(x_\omega - a) + f(a) = y_\omega$

الخليل للرياضيات

ومنه: $f'(a)(1-a)+f(a)=0$

ومنه: $\frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}-\frac{2a(a-2)}{(2a-2)^2}a+\frac{a^2-2a+2}{2a-2}=0$

ومنه: $\frac{2a(a-2)-2a^2(a-2)+(a^2-2a+2)(2a-2)}{(2a-2)^2}=0$

ومنه: $2a^2-4a-2a^3+4a^2+2a^3-2a^2-4a^2+4a+4a-4=0$

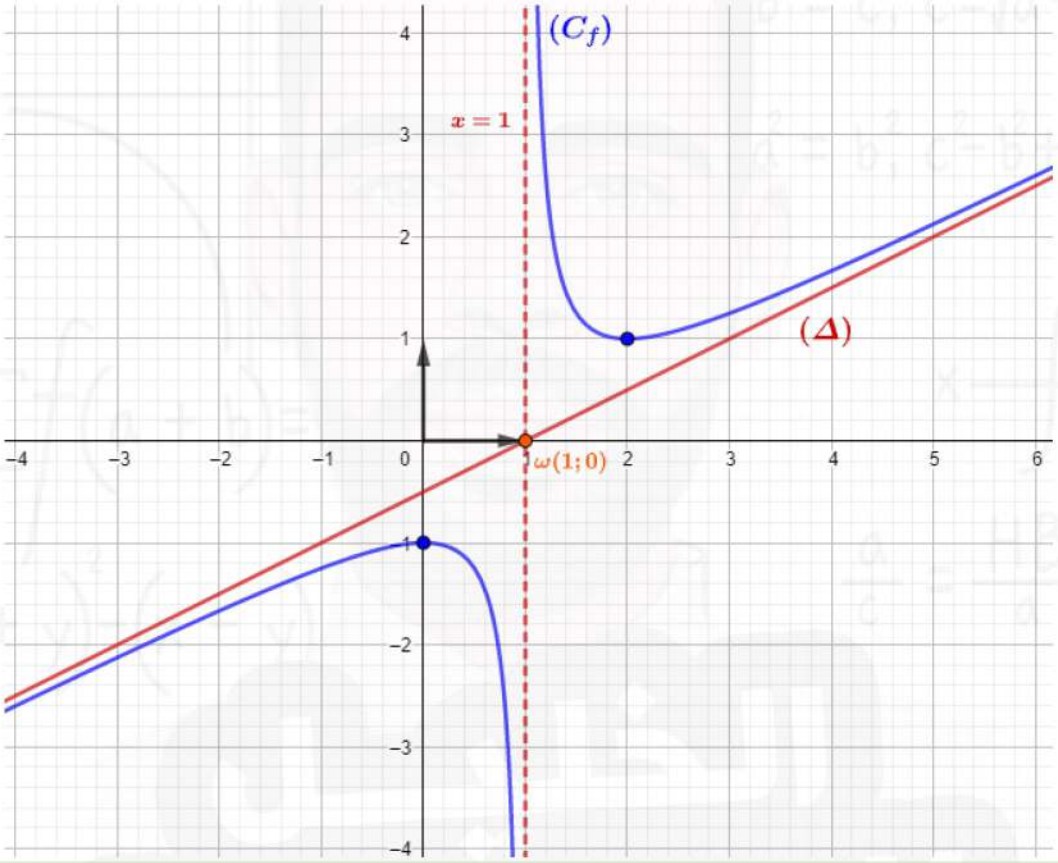
ومنه: $4a-4=0$

ومنه: $a-1=0$

ومنه: $a=1$

لكن: $a\notin\mathbb{R}-\{1\}$ إذن: لا يوجد أي مماس للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ω

❻ رسم كل من (Δ) و (C_f) :



❼ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=\frac{1}{2}x+m$ ، وهي:

لما	$m\in]-\infty;-1[$	للمعادلة حل موجب
لما	$m=-1$	للمعادلة حل معدوم
لما	$m\in\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$	للمعادلة حل سالب
لما	$m=-\frac{1}{2}$	المعادلة لا تقبل حلولا
لما	$m\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$	للمعادلة حل موجب

(III

1 دراسة شفعية الدالة h:

من أجل كل $x \in D_h$ لدينا: $x \neq 1$ و $x \neq -1$ **ومنه** $-x \neq -1$ و $-x \neq 1$ **ومنه:** $(-x) \in D_h$

ولدينا:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة h زوجية

2 توضيح كيف يمكن المنحنى (C_h) :

لدينا:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(|x|) \\ &= \begin{cases} f(x) & ; \quad x \geq 0 \\ f(-x) & ; \quad x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ومنه (C_h) ينطبق على (C_f) لما $x \geq 0$

وبما أن الدالة h زوجية فهي متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب.

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

الخليل للرياضيات