الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) المستوى: 3 ثانوي "ع.ت" المادة: رياضيات	**اختبار** **الفصل الثاني**	الموسم الدراسي: 2025/2026م المدة: (3سا) إعداد: عبد المطلب

تمرين1 (4نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=\alpha$ و $u_{n+1}=\dfrac{\alpha u_n}{u_n+2\alpha}$. α عدد حقيقي موجب تماما.

1) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$، فإنّ: $0<u_n\leq\alpha$.

2) أ) تحقّق أنّ: $u_{n+1}-u_n=-\dfrac{{u_n}^2+\alpha u_n}{u_n+2\alpha}$. استنتج اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n).

ب) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\dfrac{u_n}{u_n+\alpha}$.

أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{2}$، يطلب تعيين حدّها الأول v_0.

ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n، استنتج عبارة u_n بدلالة n و α.

4) احسب بدلالة العدد الطبيعي n كلا من الجداء P_n والمجموع S_n حيث:

$P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\ldots\times e^{v_n}$ و $S_n=\ln\left(\dfrac{\alpha}{u_0}+1\right)+\ln\left(\dfrac{\alpha}{u_1}+1\right)+\ldots+\ln\left(\dfrac{\alpha}{u_n}+1\right)$.

تمرين2 (5نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 9 كريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس منها: 5 كريات بيضاء، 3 كريات سوداء، وكرية خضراء واحدة. نسحب عشوائيا من هذا الصندوق ثلاث كريات في آن واحد.

1) احسب احتمال سحب ثلاث كريات من لونين مختلفين.

2) نعتبر أنّه عند سحب كرية بيضاء نسجّل ثلاث نقاط، وعند سحب كرية سوداء نسجّل نقطتين، ونسجّل نقطة واحدة عند سحب كرية خضراء. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات مجموع النّقاط المسجّلة.

أ) برّر أنّ قيم المتغير العشوائي هي: $\{5\,;6\,;7\,;8\,;9\}$، ثم بيّن أنّ: $P(X=6)=\dfrac{4}{21}$.

ب) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

3) نسحب الآن من الصندوق U_1 ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع.

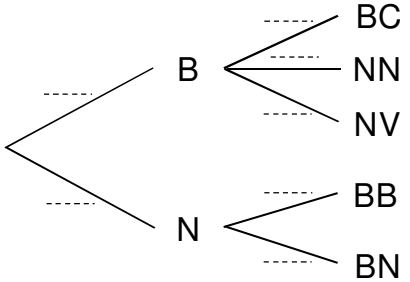
أ) احسب احتمال سحب كرية بيضاء للمرة الأولى في السحب الثالث.

ب) احسب احتمال سحب ثلاث كريات مختلفة الألوان مثنى مثنى.

4) يحتوي صندوق U_2 على 5 كريات متماثلة ولا نفرّق بينها باللّمس منها: 3 كريات بيضاء وكريتان سوداوان.

نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كرية واحدة ونسجّل لونها. إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نضعها في الصندوق U_1 ثم نسحب منه عشوائيا كريتين في آن واحد، وإذا كانت الكرية المسحوبة سوداء نضعها جانبا ثم نسحب من الصندوق U_2 عشوائيا كريتين في آن واحد. نعتبر الحوادث التالية: B: الحصول على كرية بيضاء. N: الحصول على كرية سوداء.

V: الحصول على كرية خضراء. C: الحصول على كرية من أحد الألوان الثلاث.



أ) بيّن أنّ: $p_{\mathrm{B}}(\mathrm{BC})=\dfrac{13}{15}$، وأنّ: $p_{\mathrm{N}}(\mathrm{BB})=\dfrac{1}{2}$.

ب) انقل وأكمل شجرة الاحتمالات المقابلة والتي تنمذج هذه العملية.

ج) احسب $p(\mathrm{E})$ احتمال سحب ثلاث كريات مختلفة الألوان مثنى مثنى، واستنتج حساب $p(\mathrm{F})$ احتمال سحب كريتين من نفس اللّون على الأقّل.

تمرين3 (4نقاط)

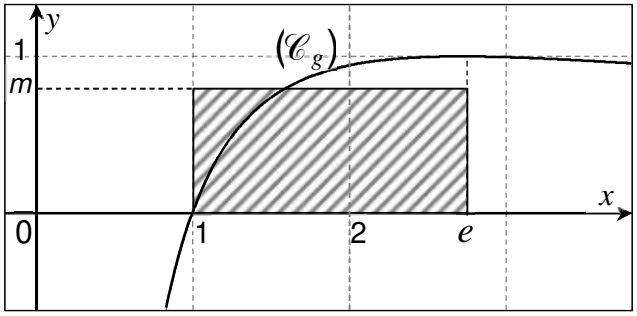
g و h الدالتان العدديتان المعرّفتان على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{e\ln x}{x}$ و $h(x)=\dfrac{e^2\ln x}{x^2}$.

$(\mathscr{C}_g)$ و $(\mathscr{C}_h)$ التمثيل البياني لكل منهما في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I و J العددان الحقيقيان المعرّفان كما يلي: $I=\int_1^e \dfrac{\ln x}{x}dx$ و $J=\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2}dx$.

1) ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C}_g)$ بالنسبة للمنحني $(\mathscr{C}_h)$ مع تحديد نقاط تقاطعهما.

2) بيّن أنّ: $I=\dfrac{1}{2}$، ثم باستعمال المكاملة بالتجزئة بيّن أنّ: $J=1-\dfrac{2}{e}$.



3) احسب المساحة $\mathscr{A}$ للحيّز المحدّد بالمنحنيين $(\mathscr{C}_g)$ ، $(\mathscr{C}_h)$ والمستقيمين اللّذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=e$.

4) الشكل المقابل: التمثيل البياني $(\mathscr{C}_g)$ والمستطيل الذي طوله $(e-1)$ وعرضه m. احسب قيمة m التي من أجلها مساحة المستطيل الموضح في الشكل تساوي $e\times I$. ماذا تمثل m؟ علّل.

تمرين4 (7نقاط)

I- f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}e^{-2x}$. $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، وبيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

2) ادرس اتّجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3) أ) بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y=x-\dfrac{1}{2}$.

ب) ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ (Δ)، ثم بالنسبة للمستقيم (Δ') ذي المعادلة $y=x$.

4) احسب $f(-1)$ ثم ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') والمنحني $(\mathscr{C})$. (وحدة الطول $2cm$)

5) باستعمال البيان $(\mathscr{C})$ عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $e^{-2x}+2m-1=0$ حلا موجبا تماما.

6) k عدد طبيعي. $\mathscr{A}(k)$ المساحة للحيّز المحدّد بـ $(\mathscr{C})$، (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x=k$ و $x=k+1$.

أ) بيّن أنّ: $\mathscr{A}(k)=e^{-2k}(1-e^{-2})\,cm^2$، ثم احسب $\lim\limits_{k\to+\infty}\mathscr{A}(k)$.

ب) نعتبر المجموع S_k حيث: $S_k=\mathscr{A}(0)+\mathscr{A}(1)+\ldots+\mathscr{A}(k)$. فسّر بيانيا S_k، ثم احسب S_k ونهاية S_k.

7) (u_n) المتتالية العددية المعرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بـ: $u_0=2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n، $0\le u_{n+1}\le u_n\le 2$.

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب نهايتها.

II- g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x+a\left(1-e^{-2x}\right)$. حيث a عدد حقيقي.

عيّن قيمة (قيم) العدد الحقيقي a في كل حالة مما يلي:

1) الدالة g هي حل للمعادلة التفاضلية: $y'=2(x-y)$.

2) التمثيل البياني للدالة g يقبل في المبدأ مماسا معامل توجيهه 3.

3) الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

بالتوفيق

تصحيح اختبار الفصل الثاني 2026م

تمرين 1 : "عبد المطلب"

1) $u_0=\alpha$ و $\alpha>0$ (محققة) : $n=0$

نفرض أن $0<u_n\leq\alpha$ من أجل n كيفي

ونبرهن صحة "$0<u_{n+1}\leq\alpha$". لدينا $0<u_n<\alpha$

$0<\alpha u_n\leq\alpha^2$ ؛ $2\alpha<u_n+2\alpha\leq 3\alpha$

$\frac{0}{3\alpha}<\frac{\alpha u_n}{u_n+2\alpha}\leq\frac{\alpha}{2}\leq\alpha$ ؛ $\frac{1}{3\alpha}\leq\frac{1}{u_n+2\alpha}<\frac{1}{2\alpha}$

$0<u_{n+1}\leq\alpha$ ؛ ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ ، $0<u_n\leq\alpha$

2) $u_{n+1}-u_n=\frac{\alpha u_n}{u_n+2\alpha}-u_n=\frac{-u_n^2-\alpha u_n}{u_n+2\alpha}<0$

أي (u_n) متناقصة ؛ ومنه $u_n>0$ و $\alpha>0$: (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

ب) (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$ ؛ $\ell=\frac{\alpha\ell}{\ell+2\alpha}$

$\ell(\ell+\alpha)=0$ ، $\ell=-\alpha$ (مرفوض) أو $\ell=0$

3) $v_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_{n+1}+\alpha}=\frac{\frac{\alpha u_n}{u_n+2\alpha}}{\frac{\alpha u_n}{u_n+2\alpha}+\alpha}=\frac{\alpha u_n}{2\alpha u_n+2\alpha^2}$

$v_{n+1}=\frac{\alpha}{2\alpha}\left(\frac{u_n}{u_n+\alpha}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{u_n}{u_n+\alpha}\right)=\frac{1}{2}v_n$

(v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ و $v_0=\frac{\alpha}{2\alpha}=\frac{1}{2}$

ب) $v_n=v_0\cdot q^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (الحد العام)

$v_n=\frac{u_n}{u_n+\alpha}$ ؛ $v_nu_n+\alpha v_n=u_n$

$u_n=\frac{\alpha v_n}{1-v_n}$ ؛ ومنه $u_n(v_n-1)=-\alpha v_n$

نجد : $u_n=\frac{\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=\frac{\alpha}{2^{n+1}-1}$

4) $P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\dots\times e^{v_n}=e^{v_0+v_1+\dots+v_n}$

$P_n=e^{v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)}=e^{\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right)}=e^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

$S_n=\ln\left(\frac{\alpha}{u_0}+1\right)+\ln\left(\frac{\alpha}{u_1}+1\right)+\dots+\ln\left(\frac{\alpha}{u_n}+1\right)$

لدينا : $\frac{\alpha}{u_n}=\frac{1-v_n}{v_n}=\frac{1}{v_n}-1$

$S_n=\ln\left(\frac{1}{v_0}\right)+\ln\left(\frac{1}{v_1}\right)+\dots+\ln\left(\frac{1}{v_n}\right)=\ln\left(\frac{1}{v_0}\times\frac{1}{v_1}\times\dots\times\frac{1}{v_n}\right)$

لدينا : $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ أي $\frac{1}{v_n}=2^{n+1}$

$S_n=\ln\left(2^1\times2^2\times\dots\times2^{n+1}\right)=\ln\left(2^{1+2+\dots+n+1}\right)$

$S_n=\ln 2^{\frac{n+1}{2}(1+n+1)}=\ln 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\ln 2$

تمرين 2 : 1V 3N 5B

1) $P=\frac{C_5^2\times C_4^1+C_3^2\times C_6^1}{C_9^3}=\frac{29}{42}$

2) أ و ب) $X=\{5;6;7;8;9\}$

$P(X=5)=P(VNN)=\frac{C_1^1\times C_3^2}{C_9^3}=\frac{1}{28}$

$P(X=6)=P(NNN)+P(VNB)=\frac{C_3^3+C_1^1\cdot C_3^1\cdot C_5^1}{C_9^3}=\frac{4}{21}$

$P(X=7)=P(VBB)+P(NNB)=\frac{C_1^1C_5^2+C_3^2\cdot C_5^1}{C_9^3}=\frac{25}{84}$

$P(X=8)=P(NVBB)=\frac{C_3^1\times C_5^2}{C_9^3}=\frac{5}{14}$

$P(X=9)=P(BBB)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}$

x_i	5	6	7	8	9
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{28}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{25}{84}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{42}$

$E(X)=\sum_{k=5}^{k=9}P(X=k)=\frac{5}{28}+\frac{24}{21}+\frac{175}{84}+\frac{40}{14}+\frac{45}{42}=\frac{22}{3}$

3) $P_1=\frac{A_4^2\times A_5^1}{A_9^3}=\frac{5}{42}$

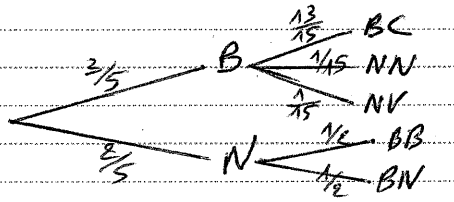
ب) $P_2=\frac{A_3^3\left(A_1^1\times A_3^1\times A_5^1\right)}{A_9^3}=\frac{5}{28}$

4) $BVN\ BNV\ NVB\ NBV\ VNB\ VBN$ $A_3^3=3!=6$

أ) $P_B(BC)=\frac{C_6^2+C_6^1\times C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{13}{15}$ (6B 3N 1V) ($BB+BN+BV$)

$P_N(BB)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$ (3B 1N)

ب)



ج) $P(E)=P(B\cap NV)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{25}$

$P(F)=1-P(E)=\frac{24}{25}$

تمرين 3 :

1) $g(x)-h(x)=\frac{e\ln x}{x}-\frac{e^2\ln x}{x^2}=\frac{e(x-e)\ln x}{x^2}$

x	0		1		e		$+\infty$
$x-e$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)-h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(C_R) فوق (C_g) : $x\in]1;e[$

(C_R) تحت (C_g) : $x\in]0;1[\cup]e;+\infty[$

(C_R) يقطع (C_g) في $A(1;0)$ ، $B(e;1)$

2) $I=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\cdot(\ln x)dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{1}{2}$

$\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x}\\ v(x)=-\frac{1}{x}\end{cases}$ $\begin{cases}u(x)=\ln x\\ v'(x)=\frac{1}{x^2}\end{cases}$

$J = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^e + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e$

$J = \left[\frac{-1-\ln x}{x}\right]_1^e = -\frac{2}{e} - (-1) = 1 - \frac{2}{e}$

3) $A = \int_1^e (f(x) - g(x))dx = \int_1^e f(x)dx - \int_1^e g(x)dx$

$A = e^2 J - eI = e\left(e - 2 - \frac{1}{2}\right)$

$A = e\left(e - \frac{5}{2}\right)$ u.a

4) $m(e-1) = eI = \frac{e}{2}$ ومنه $m = \frac{e}{2(e-1)}$

m تمثل القيمة المتوسطة لـ g على $[1;e]$

لأن eI هي المساحة بين (C_g) ، (Ox) ، $x=1$ ، $x=e$

تمرين 4:

I - 1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{1}{2} + \frac{e^{-2x}}{2}\right) = +\infty$ (0)

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}e^{-2x}(2xe^{2x} - e^{2x} + 1) = +\infty$ (0)

2) $f'(x) = 1 - e^{-2x} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

f متناقصة تماما على $]-\infty;0]$

3) $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{2} = 0$

$(\Delta): y = x - \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لـ (C).

ب) الوضع النسبي: $f(x) - y = \frac{e^{-2x}}{2} > 0$

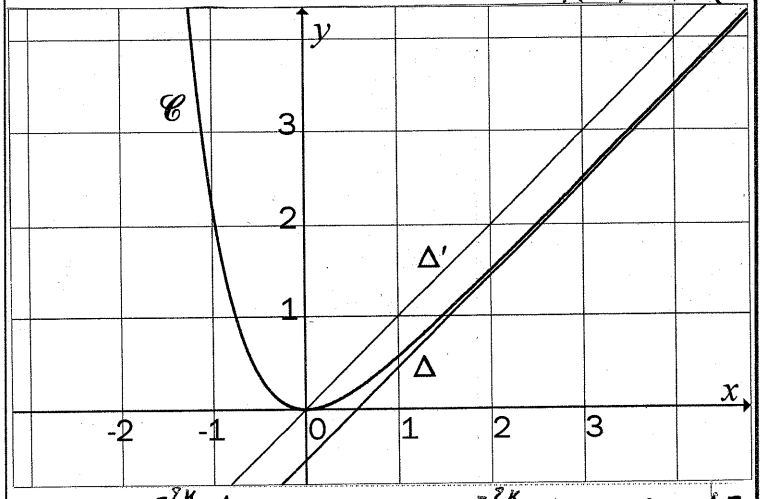
(C) أعلى (Δ).

$f(x) - x = \frac{1}{2}(e^{-2x} - 1)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	
		(C) أعلى (Δ)		(C) أسفل (Δ)	

(C) يقطع (Δ) في النقطة $O(0;0)$.

4) $f(-1) \approx 2,2$



5) $\frac{e^{-2x}-1}{2} = -m$ ؛ $e^{-2x} - 1 = -2m$

حلول هذه المعادلة $f(x) = x - m$ هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)

$0 < m < \frac{1}{2}$: $-\frac{1}{2} < -m < 0$: موجبا تماما لـ h

1) $A(k) = \int_k^{k+1}(f(x) - y)dx = \int_k^{k+1} \frac{e^{-2x}}{2}dx$ (P.I.6)

$A(k) = \left[\frac{-e^{-2x}}{4}\right]_k^{k+1} = \frac{1}{4}(-e^{-2k-2} + e^{-2k})$ u.a

$A(k) = (e^{-2k} - e^{-2k-2})\,cm^2 = e^{-2k}(1-e^{-2})\,cm^2$

$\lim_{k\to+\infty} A(k) = 0$

ب) S_k هو المساحة بين (C) ، (Δ) والمستقيمين $x=0$ ، $x=k+1$

حساب S_k : طريقة 1 (حالة خاصة): $S_k = \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2}dx + \int_1^2 \frac{e^{-2x}}{2}dx + \ldots + \int_k^{k+1} \frac{e^{-2x}}{2}dx$

$S_k = \int_0^{k+1} \frac{e^{-2x}}{2}dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^{k+1} cm^2 = (1 - e^{-2k-2})\,cm^2$

طريقة 2: $S_k = e^0 - e^{-2} + e^{-2} - e^{-4} + \ldots + e^{-2k} - e^{-2k-2}$

المجموع التلسكوبي

$S_k = (e^0 - e^{-2k-2})\,cm^2$

طريقة 3: مجموع متتالية هندسية $q = e^{-2}$

$(1-e^{-2})(e^0 + e^{-2} + e^{-4} + \ldots + e^{-2k}) =$

$(1-e^{-2})\left(\frac{1-(e^{-2})^{k+1}}{1-e^{-2}}\right) = 1 - e^{-2k-2}\,cm^2$

$\lim_{k\to+\infty} S_k = 1\,cm^2$

7) $n=0$: $0 \leq u_1 \leq u_0 \leq 2$ محققة لأن $u_1 = 1,5$

نفرض أن $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$ ونبرهن صحة $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 2$ ، بما أن f متزايدة تماما على $[0;2]$

$f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(2)$ أي $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 1,51 \leq 2$

محققة ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 2$

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

$f(l) = l$ ؛ $-\frac{1}{2} + \frac{e^{-2l}}{2} = 0$ ومنه $l = 0$

II - 1) $g'(x) + 2g(x) = 2x$

$1 + 2ae^{-2x} + 2x + 2a - 2ae^{-2x} = 2x$

$1 + 2a = 0$ ومنه $a = -\frac{1}{2}$

2) $g'(0) = 3$ أي $1 + 2ae^{-2(0)} = 3$

ومنه $1 + 2a = 3$: $a = 1$

3) $g'(x) = 1 + 2ae^{-2x}$

g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ من أجل $a \geq 0$ ومنه : $a \in [0;+\infty[$ $(g'(x) \geq 0)$

"عبد المطلب"