

الشعبة : تقني رياضي	اختبار في مادة : الرياضيات	المدة : 04 سا و 30 د
---------------------	----------------------------	----------------------

على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

لدينا حجر نرد مغشوش مكعب الشكل ، وجوهه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 6 نسمي P_n احتمال الحصول على الرقم n مع $1 \leq n \leq 6$ حيث :

- الأعداد $P_6, P_5, P_4, P_3, P_2, P_1$ تشكل بهذا الترتيب حدودا متتالية حسابية أساسها r غير معدوم
- الأعداد P_4, P_2, P_1 تشكل بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية

$$(1) \text{ أ) بين أن : } P_1 = r = \frac{1}{21}$$

$$(ب) \text{ بين انه من اجل كل عدد طبيعي } n : 1 \leq n \leq 6 , \text{ لدينا : } P_n = \frac{n}{21}$$

(2) نرمي هذا النرد مرة واحدة و نسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي بعد استقرار النرد
أ) احسب احتمال وقوع الحوادث التالية :

A " الحصول على رقم زوجي " ، B " الحصول على رقم اكبر او يساوي 3 " ، C " الحصول على مربع تام "

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب : $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$

$$(1) \text{ أ) بين ان } U_1 = \ln \sqrt{2}$$

$$(ب) \text{ بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : U_{n+2} + U_n = \frac{1}{n+1}$$

(ج) استنتج قيمة U_3

$$(2) \text{ أ) بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$(ب) \text{ احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

II. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب : $V_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dx$

$$(1) \text{ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n : V_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} U_{n+2}$$

$$(2) \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} n V_n$$

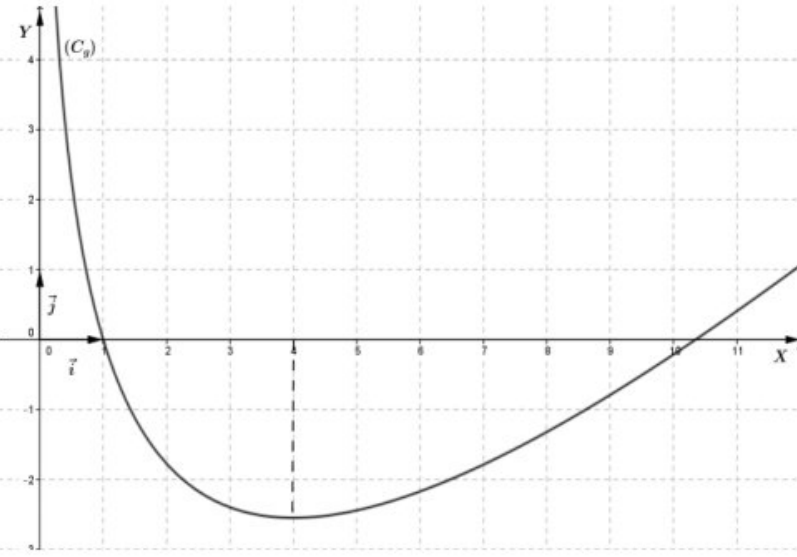
التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

- (1) أ/ أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 5^n على 7 .
 ب/ برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $3^n \equiv 3[6]$
 ج/ استنتج أن العدد 7 قاسما للعدد a حيث : $a = 1447^{2025^{1962}} - (2025^{1447})^{1962}$
 (2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون : $4(5^{n-2} + 5^{n-3} + \dots + 1) \equiv 3[7]$
 (3) أ/ تحقق أنه من اجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = 2n^2 + 6n + 6$
 ب/ عين قيم العدد الطبيعي n التي من اجلها يكون العدد : $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2$ مضاعفا للعدد 7 .
 (4) فيما يلي نفرض : $n = 9$
 نعتبر المعادلة : $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$ ذات المجهولين الصحيحين x و y
 أ/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل

ب/ بين انه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 0[5]$ ثم حل في $\square^2$ المعادلة (E)

التمرين الرابع : (07,5 نقاط)

I. الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = (x-1) - 4 \ln x$
 و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد
 و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. في الشكل المقابل المنحني (C_g) يقطع
 محور الفواصل في النقطتين فواصلها 1 و α



بقراءة بيانية :

- (أ) شكل جدول تغيرات الدالة g
 (ب) حدد حسب قيم x إشارة g

II. الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4 \ln x$ ، و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- (1) أ) تحقق انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = e^{g(x)} - g(x)$
 ب) بين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسر هندسيا النتيجة.
 (2) أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g'(x)(e^{g(x)} - 1)$
 ب) بين أن f متناقصة تماما على المجالين $]0; 1[$ و $[4; \alpha]$ و f متزايدة تماما على المجالين $[1; 4]$ و $[\alpha; +\infty[$
 ج) بين أن $f(\alpha) = 1$ و احسب $f(1)$ ثم شكل جدول تغيراتها
 (3) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $e^x - 2x > 0$ ثم ادرس الوضع النسبي ل (C_f) و (C_g)
 (4) أرسم المنحني (C_f) نأخذ $\alpha \approx 10.5$.
 (5) A مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) و حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهم $x=5$ و $x=3$
 أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x على المجال $[3; 5]$: $-g(x) < f(x) < f(4)$
 ب) الدالة $x \mapsto x(-1 + \ln x)$ هي أصلية ل $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$
 ج) بين أن $20 \ln 5 - 12 \ln 3 - 14 < A < 2f(4)$

الإجابة النموذجية لموضوع إمتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2025 شعبة تقني رياضي

العلامة		عناصر الإجابة	(الموضوع الأول)
مجموع	مجزأة		
التمرين الأول : 03 نقاط			
03ن	0,5ن	(1) أ) لدينا : $P_2 = P_1 + r$ و $P_4 = P_1 + 3r$ و $P_2^2 = P_1 \times P_4$ بالتعويض نجد : $P_1 = r$	
	0,5ن	و $\sum_{i=1}^6 P_i = 6\left(\frac{P_1 + P_6}{2}\right) = 21P_1 = 1$ ومنه $P_1 = r = \frac{1}{21}$	
	0,5ن	(2) لدينا $P_1 = r = \frac{1}{21}$ ومنه $P_2 = P_1 + r = 2P_1 = \frac{2}{21}$ ومنه $P_n = \frac{n}{21}$	
	3×0,5ن	(3) $P(C) = \frac{5}{21}$ ، $P(B) = \frac{18}{21}$ ، $P(A) = \frac{12}{21}$	
التمرين الثاني : 05 نقاط			
05ن	0,5ن	I. أ) $U_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_0^1 = \ln \sqrt{2}$	
	0,5ن	ب) $U_{n+2} + U_n = \left(\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} + \frac{x^n}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1}$	
	0,5ن	ج) $U_3 = \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2}$ ومنه $U_3 + U_1 = \frac{1}{2}$	
	01ن	(2) أ) $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$	
	0,5ن	ب) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$	
	01ن	II. 1) $V_n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x^2) \Big _0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} U_{n+2}$	
	01ن	(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} nV_n = \ln 2$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$	
التمرين الثالث : 04,5 نقاط			
04,5ن	0,5ن	(1) أ) $5^6 \equiv 1[7]; 5^5 \equiv 3[7]; 5^4 \equiv 2[7]; 5^3 \equiv 6[7]; 5^2 \equiv 4[7]; 5^1 \equiv 5[7]; 5^0 \equiv 1[7]$ ومنه لكل $k \in \mathbb{Z}$ $5^{6k+\alpha} \equiv 5^\alpha [7]$ حيث $\alpha = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$	
	0,5ن	ب) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P(n) \cdots 3^n \equiv 3[6]$: المرحلة الأولى : من أجل $n=1$: $3^1 \equiv 3[6]$ ومنه $P(1)$ محققة المرحلة الثانية : نفرض انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P(n)$ محققة ونبرهن صحة $P(n+1)$	
	01ن	$1447^{2025^{1962}} \equiv 1[7]$ و $(2025^{1447})^{1962} \equiv 1[7]$ ومنه $1447^{2025^{1962}} - (2025^{1447})^{1962} \equiv 0[7]$ قاسم ل 7 و بالتالي : a	
	0,5ن	(2) $5^{n-1} \equiv 3[7] : (k \in \mathbb{Z}^*) n = 6k$ و منه من اجل $4 \times (5^{n-2} + 5^{n-3} + \cdots + 1) = 5^{n-1}$	
	0,25ن	(3) أ) $2C_{n+1}^2 + A_{n+3}^2 = n(n+1) + (n+3)(n+2) = 2n^2 + 6n + 6$	

		(ب)																																
01ن	<table><tr><td>$n \equiv$</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>$2n^2 \equiv$</td><td>0</td><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$6n \equiv$</td><td>0</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>$2n^2 + 6n + 6 \equiv$</td><td>6</td><td>0</td><td>5</td><td>0</td><td>6</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>	$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	$2n^2 \equiv$	0	2	1	4	4	1	2	$6n \equiv$	0	6	5	4	3	2	1	$2n^2 + 6n + 6 \equiv$	6	0	5	0	6	2	2	وبالتالي : $n = 7k + 1$ أو $n = 7k + 3$ حيث $k \in \mathbb{Z}$
	$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6																										
	$2n^2 \equiv$	0	2	1	4	4	1	2																										
	$6n \equiv$	0	6	5	4	3	2	1																										
$2n^2 + 6n + 6 \equiv$	6	0	5	0	6	2	2																											
0,25ن	$15x - 44y = 5$ ومنه $45x - 132y = 15$ ومنه $C_{10}^2 x - A_{12}^2 y = 15 \dots (E)$ (4 ومنه $44y = 15x - 5$ ومنه $44y \equiv -5[15]$ ومنه $y \equiv 5[15]$ و بالتالي $y \equiv 0[5]$ لان $y = 15k + 5 = 5(3k + 1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$																																	
0,5ن	حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) : $(x; y) = \{44k + 15; 5k\}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$																																	
التمرين الرابع : 07,5 نقاط																																		
07,5ن	0,5ن	I. أ) جدول تغيرات الدالة g <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>4</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$3 - 8\ln 2$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	4	$+\infty$	$g'(x)$	-	0	+	$g(x)$	$+\infty$	$3 - 8\ln 2$	$+\infty$																				
	x	0	4	$+\infty$																														
	$g'(x)$	-	0	+																														
	$g(x)$	$+\infty$	$3 - 8\ln 2$	$+\infty$																														
	0,5ن	ب) جدول اشارة $g(x)$ <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	0	1	α	$+\infty$	$g(x)$	+	0	-	0	+																					
x	0	1	α	$+\infty$																														
$g(x)$	+	0	-	0	+																													
0,5ن	II. أ) $e^{g(x)} - g(x) = e^{(x-1)-4\ln x} - (x-1) + 4\ln x = \frac{e^{(x-1)}}{e^{4\ln x}} - (x-1) + 4\ln x$ $= \frac{e^{x-1}}{x^4} - (x-1) + 4\ln x = f(x)$																																	
2×0,25ن	ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{g(x)} - g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1 \right] = +\infty$																																	
0,25ن	$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{g(x)} - g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \left[\frac{e^{g(x)}}{g(x)} - 1 \right] = +\infty$ التفسير الهندسي : المنحني (C_f) يقبل حامل محور التراتيب كمستقيم مقارب																																	
0,25ن	(5) أ) الدالة قابلة للاستقاق على المجال و دالتها المشتقة هي : $f'(x) = g'(x)e^{g(x)} - g'(x) = g'(x)(e^{g(x)} - 1)$																																	

		(ب) إشارة $f'(x)$: $g'(x)=0$ أو $e^{g(x)}-1=0$																												
0,5ن		<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$e^{g(x)}-1$</td><td></td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	0	1	4	α	$+\infty$	$g'(x)$		-	0	+		$e^{g(x)}-1$		+	0	-	0	+	$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
x	0	1	4	α	$+\infty$																									
$g'(x)$		-	0	+																										
$e^{g(x)}-1$		+	0	-	0	+																								
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+																						
0,5ن		وبالتالي : الدالة f متناقصة تماما على المجالين $]0;1]$ و $[4;\alpha]$ و الدالة f متزايدة تماما على المجالين $[1;4]$ و $[\alpha;+\infty[$																												
2×0,25ن		(ج) لدينا $f(1)=e^{g(1)}-g(1)=e^0-0=1$ و $f(\alpha)=e^{g(\alpha)}-g(\alpha)=e^0-0=1$ جدول تغيرات الدالة f																												
0,5ن		<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+\infty$</td><td>$\searrow$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>$f(4)$</td><td>$\searrow$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> $f(4)=e^{g(4)}-g(4)=e^{3-8\ln 2}-3+8\ln 2=\frac{e^3}{2^8}-3+8\ln 2$	x	0	1	4	α	$+\infty$	$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	$f(x)$		$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$		
x	0	1	4	α	$+\infty$																									
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+																						
$f(x)$		$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$																				
0,25ن		(6) $e^x-2x>0$ ،دراسة الوضع النسبي ل (C_g) و (C_f)																												
0,5ن		ندرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)=e^{g(x)}-2g(x)>0$: وبالتالي (C_f) يقع فوق (C_g)																												
01ن		(7) رسم (C_f) 																												

	0,25ن	(8 أ) $-g(x) < f(x) < f(4)$
	0,5ن	ب) الدالة $x \mapsto x(-1 + \ln x)$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي: وبالتالي الدالة $x \mapsto x(-1 + \ln x)$ هي أصلية ل $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$
	0,5ن	ج) لدينا $-g(x) < f(x) < f(4)$ ومنه $-\int_3^5 g(x)dx < \int_3^5 f(x)dx < \int_3^5 f(4)dx$ ومنه $-\left[\frac{1}{2}x^2 + x + 4x(-1 + \ln x)\right]_3^5 < \int_3^5 f(x)dx < f(4)x \Big _3^5$ و بالتالي $20\ln 5 - 12\ln 3 - 14 < A < 2f(4)$

من إعداد الأستاذ : زراوني عمر

ثانوية الشهيد أحمد زبانة " زهانة "