الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي — **ثانوية بن زايد سعيد ابن هاشمي — العوانة**
الشعبة: علوم تجريبية — **ثانوية راشدي محمد — سيدي معروف**
دورة: ماي 2025 — **ثانوي مدوري محمد بن مسعود — بن ياجيس**

اختبار في مادة: الرياضيات — **المدة: 03 سا و30 د**

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس غير شفاف على عشر كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس موزعة: خمس كريات بيضاء مرقمة بـ -1، 0، 1، 2 و 3؛ ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ 3، 4 و -5؛ وكريتين حمراوين مرقمتين بـ -1 و 0.
نسحب عشوائيا من الكيس أربع كريات في آن واحد. نعتبر الأحداث التالية:

A : «الكريات الأربع المسحوبة من نفس اللون».
B : «الحصول على كريات جداء أرقامها عدد زوجي».
C : «الحصول على كريات مجموع أرقامها عدد فردي».
D : «الحصول على كريات جداء أرقامها سالب تماما».

1/ أُحسب كلا من $P(A)$، $P(B)$، $P(C)$ و $P(D)$.

2/ أُحسب $P_A(C)$. هل الحدثان A و C مستقلان؟ علّل.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لأربع كريات عدد الأرقام السالبة تماما المسجلة عليها.

ا/ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X، ثمّ أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب/ أُحسب $P(C_3^X = 3)$.

4/ أُحسب احتمال الحدث C في حالة سحب لأربع كريات من الكيس على التوالي دون إرجاع.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس موّجه $(O; \vec{u}; \vec{v})$. عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد مع التبرير في كل حالة:

1/ حلول المعادلة ذات المجهول المركب Z : $Z^2 = 1 - i4\sqrt{3}$ هي:

(أ) $S = \{2 + i\sqrt{3}; -2 - i\sqrt{3}\}$ **(ب)** $S = \{2 - i\sqrt{3}; -2 + i\sqrt{3}\}$ **(جـ)** $S = \{2 + i\sqrt{3}; 2 - i\sqrt{3}\}$

2/ ليكن Z عددا مركبا حيث : $Z = -2i\left(\sin\frac{\pi}{7} - i\cos\frac{\pi}{7}\right)$. عمدة للعدد المركب Z هي:

(أ) $\frac{\pi}{7}$ **(ب)** $\frac{5\pi}{7}$ **(جـ)** $-\frac{6\pi}{7}$

3/ الشكل الجبري للعدد المركب $Z = (1 + i\sqrt{3})^{2025}$ هو:

(أ) $-2^{2025}i$ **(ب)** $2^{2025}i$ **(جـ)** -2^{2025}

4/ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق : $|iZ - 2 + 3i| = |\overline{Z} + \sqrt{3} - i|$ هي المستقيم المحوري للقطعة $[AB]$ حيث:

(أ) $A(-3; -2)$ و $B(-\sqrt{3}; -1)$ **(ب)** $A(-2; 3)$ و $B(\sqrt{3}; -1)$ **(جـ)** $A(2; 3)$ و $B(\sqrt{3}; 1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $u_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)}u_n$.

1/ هل المتتالية (u_n) حسابية؟ هندسية؟ علّل.

2/ ا/ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 0$.

ب/ أُدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

3/ نعتبر (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = 2^n \times n \times u_n$.

ا/ أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يُطلب تعيين حدها الأول.

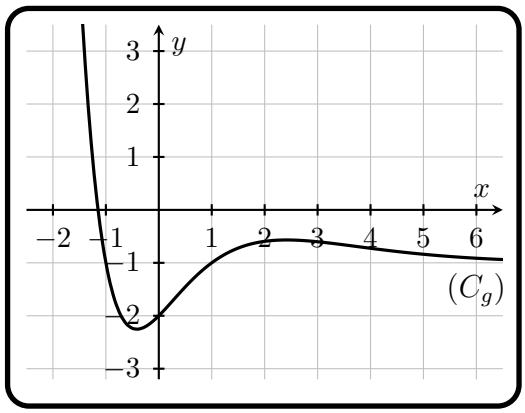
ب/ أُكتب عبارة v_n بدلالة n، ثمّ (u_n) بدلالة n، ثمّ أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم، نضع : $S_n = \frac{4}{3}v_1 + \frac{16}{9}v_2 + \frac{4^3}{3^3}v_3 + \cdots + \frac{4^n}{3^n}v_n$ و $P_n = u_1 \times 2u_2 \times 3u_3 \times \cdots \times nu_n$.

– أُحسب S_n، ثمّ بيّن أنّ : $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$. (لاحظ : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. في الشكل المقابل، (C_g) هو المنحنى الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x^2-1)e^{-x} - 1$.
(C_g) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $-1.2 < \alpha < -1.1$.



1/ أُحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ وفسّر هذه النتيجة بيانيا.

2/ بقراءة بيانية، حدّد حسب قيّم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

II. نعتبر الدالةالعددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 - x - (x+1)^2e^{-x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أُحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$، ثمّ أُدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

3/ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكّل جدول تغيراتها.

4/ بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسين معامل توجيههما -1 أحدهما (Δ) والآخر (T) يُطلب تعيين معادلة له.

5/ بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما 0 و β حيث $-1.8 < \beta < -1.7$.

6/ ا/ أنشئ (Δ)، (T) و (C_f) في نفس المعلم. (نأخذ : $f(\alpha) \simeq 2.1$)

ب/ ناقش بيانيا حسب قيّم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = -x + m$.

7/ ا/ عيّن العددين الحقيقين a و b حتى تكون $K : x \longmapsto (-x^2 + ax + b)e^{-x}$ دالة أصلية لـ $k : x \longmapsto (x+1)^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب/ أُحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = -1$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الأول.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

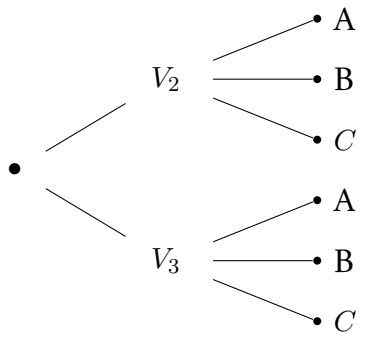
V_1، V_2 و V_3 ثلاث صناديق متماثلة غير شفافة. يحتوي V_1 على ثلاث كريات سوداء وخمس كريات بيضاء. يحتوي V_2 على كريتين سوداوين وثلاث كريات بيضاء. ويحتوي V_3 على كريتين سوداوين وكرية بيضاء. جميع الكريات متماثلة ولا يمكن التفريق بينها باللمس. نسحب عشوائيا كرية واحدة من الصندوق V_1 ونميز حالتين:

- إذا كانت الكرية المسحوبة بيضاء نضعها في الصندوق V_2، ثمّ نسحب منه عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع.
- إذا كانت الكرية المسحوبة سوداء نضعها في الصندوق V_3، ثمّ نسحب منه عشوائيا كريتين على التوالي بإرجاع.

نعتبر الأحداث التالية:

A : «الحصول على كريتين سوداوين». B : «الحصول على كريتين بيضاوين». C : «الحصول على كريتين من لونين مختلفين».

1/ أُنقل ثمّ أتمم شجرة الاحتمالات المقابلة.



2/ ا/ أُحسب كلا من $P(A)$، $P(B)$ و $P(C)$.

ب/ إذا علمت أنّ الكريتين المسحوبتين من لونين مختلفين، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق V_1 سوداء.

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

– عيّن قانون إحتمال المتغير العشوائي X، ثمّ أُحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

4/ ليكن n عدد طبيعي غير معدوم. إذا كان n يمثل عدد الكريات البيضاء في الصندوق V_2، عيّن قيمة n حتى يكون : $P_{V_2}(B) = \frac{15}{28}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $(\overline{Z} - 2i)\left(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4\right) = 0 \cdots (E)$.

II. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس موّجه $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب: $Z_A = \sqrt{3} + i$ ، $Z_B = 2\left(\sqrt{3} - i\right)$ ، $Z_C = -2i$ و $Z_D = -\overline{Z_A}$.

1/ أُحسب $|Z_A|$، $|Z_C|$ و $|Z_D|$. ماذا تستنتج فيما يخص النقط A، C و D؟

2/ ا/ أُكتب العدد $\frac{Z_A - Z_C}{Z_A - Z_B}$ على الشكل الأسي، ثمّ استنتج طبيعة المثلث ABC.

ب/ استنتج أنّ النقطة C صورة النقطة B بتحويل نقطي يُطلب تعيين عناصره المميزة.

ج/ بيّن أنّ : $Z_B + Z_D = Z_A + Z_C$ ، ثمّ حدّد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

3/ عيّن قيّم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)^n$ حقيقيا.

4/ ا/ تحقّق أنّ المبدأ O ينتمي لـ (Δ) مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوي التي تحقق : $Z = Z_B + re^{i\frac{5\pi}{6}}$ حيث $r > 0$.

ب/ عيّن مجموعة النقط (Δ).

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة بحدها الأول $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$.

1/ ا/ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$. (لاحظ أنّ : $u_{n+1} = \dfrac{4}{3} - \dfrac{7}{3(3u_n + 4)}$)

ب/ أُدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)، ثمّ استنتج تقاربها.

2/ ا/ بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 < \dfrac{1}{7}(u_n - 1)$.

ب/ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 < 2\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ ، ثمّ أُحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3/ من أجل كل عدد طبيعي n، نضع : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

— بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n < n + \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$.

4/ نعتبر (v_n) متتالية عددية معرّفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

ا/ أثبت أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\dfrac{1}{7}$، ثمّ أُكتب عبارة حدّها العام v_n بدلالة n.

ب/ أُحسب المجموع : $T = \dfrac{1}{u_0 + 1} + \dfrac{1}{u_1 + 1} + \cdots + \dfrac{1}{u_{2025} + 1}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الجدول المقابل يمثّل تغيرات الدالة g المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = 2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x$.

x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

— أُحسب $g(1)$، ثمّ عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ ا/ أُحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثمّ $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا.

ب/ بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقاربا مائلا في جوار $+\infty$، ثمّ حدّد وضعيتهما النسبية.

2/ ا/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x) = \dfrac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

ب/ استنتج إتجاه تغير الدالة f، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3/ أنشئ (Δ) و (C_f).

4/ ليكن α من المجال $]0;1[$، $S(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين ذي المعادلتين : $x = \alpha$ و $x = 1$.

ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بيّن أنّ : $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + 4$.

ب/ استنتج $S(\alpha)$ بدلالة α، ثمّ أُحسب $\lim\limits_{\alpha \xrightarrow{>} 0} S(\alpha)$.

5/ لتكن h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(e^x)$.

— أُدرس إتجاه تغير الدالة h دون تعيين عبارتها، ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

انتهى الموضوع الثاني.

الموضوع الأول

الجواب الأول

B_{-1}	B_0	$B_1B_2B_3$		
V_{-5}		V_4V_3		
R_{-1}	R_0			
3	2	5		

$B_3B_{-1}B_1$	B_0B_2	5
V_3V_{-5}	V_4	3
R_{-1}	R_0	2
6	4	

سحب 4 كرات في آن واحد: $C_{10}^4 = 210$

1- حساب احتمال الحوادث

$P(A) = \frac{C_5^4}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$

B: على الأقل رقم زوجي

$P(B) = 1 - \frac{C_6^4}{210} = \frac{195}{210} = \frac{13}{14}$

C: عدد الأرقام الفردية فردي

$P(C) = \frac{C_6^1C_4^3 + C_6^3C_4^1}{210} = \frac{104}{210} = \frac{52}{105}$

D: عدم سحب كرية تحمل رقم "0" وعدد أرقام سالبة فردي

$P(D) = \frac{C_3^1C_5^3 + C_3^3C_5^1}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$

2- حساب $P_A(C)$ والحكم في استقلالية A و C

$P(A \cap C) = \frac{C_3^3C_2^1}{210} = \frac{2}{210} = \frac{1}{105}$.

$P_A(C) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{105}}{\frac{1}{42}} = \frac{2}{5}$.

لدينا $P_A(C) \neq P(C)$ ومنه A و C غير مستقلين.

3- المتغير العشوائي وقانون احتماله

موجب ← 0 ← $(م م م)$ — 2 ← $(م م س)$

سالب تماما ← 1 ← $(م م س)$ — 3 ← $(م س س)$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{C_7^4}{210} = \frac{1}{6}$	$\frac{C_3^1C_7^3}{210} = \frac{1}{2}$	$\frac{C_3^2C_7^2}{210} = \frac{3}{10}$	$\frac{C_3^3C_7^1}{210} = \frac{1}{30}$

ب) الأمل الرياضي: $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = \frac{12}{10} = 1,2$

ج) احتمال الحادثة $(C_3^X = 3)$

يكافئ $C_3^X = 3$ أو $X = 1$ أو $X = 3-1 = 2$ ومنه

$P(C_3^X = 3) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{4}{5} = 0,8$

الجواب الثاني

1- الاقتراح الصحيح هو - ب - لأن:

$z^2 = 8$ ومنه $x^2 = 4$ أي $x = 2$ أو $x = -2$

بجمع ① و ② طرفا لطرف نجد: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \dots ① \\ x^2 - y^2 = 1 \dots ② \\ 2xy = -4\sqrt{3} \dots ③ \end{cases}$

نأخذ $x = 2$ وتعويضها في ③ نجد $4y = -4\sqrt{3}$ ومنه $y = -\sqrt{3}$

إذن: $z_1 = 2 - i\sqrt{3}$ و $z_2 = -z_1 = -2 + i\sqrt{3}$

2- الاقتراح الصحيح هو - ج - لأن:

$z = -2(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7})$ ومنه $z = -2i(\sin\frac{\pi}{7} - i\cos\frac{\pi}{7})$

ومنه $z = 2(\cos(\frac{\pi}{7} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{7} + \pi))$ وعليه

ومنه $z = 2(\cos\frac{8\pi}{7} + i\sin\frac{8\pi}{7})$

عمدة للعدد المركب z هي: $\frac{8\pi}{7} - 2\pi = \frac{-6\pi}{7}$

3- الاقتراح الصحيح هو: - ج - لأن:

$(1+i\sqrt{3})^{2025} = (2e^{i\frac{\pi}{3}})^{2025} = 2^{2025} \cdot e^{i\frac{2025\pi}{3}}$.

$= 2^{2025} \times e^{i675\pi} = 2^{2025} \times e^{i\pi} \times e^{i674\pi} = -2^{2025}$

4- الاقتراح الصحيح هو - أ - لأن:

$|iz - 2 + 3i| = |\bar{z} + \sqrt{3} - i|$ تكافئ

$|i\bar{z} + 2i^2 + 3i| = |\overline{z + \sqrt{3} + i}|$

$|i(z + 2i + 3)| = |z + \sqrt{3} + i|$

$|i||z - (-3 - 2i)| = |z + \sqrt{3} + i|$

$|z - (-3 - 2i)| = |z - (-\sqrt{3} - i)|$

ومنه $A(-3, -2)$ و $B(-\sqrt{3}, -1)$

الجواب الثالث

$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{4} \\ u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n \end{cases}$

1- هل حسابية؟ هندسية؟ حساب (u_n)

$u_2 = \frac{1}{4 \times 2} u_1 = \frac{1}{32}$ / $u_3 = \frac{2}{4 \times 3} u_2 = \frac{1}{192}$

لدينا: $u_1 + u_3 \neq 2u_2$ ومنه (u_n) ليست حسابية

و $u_1 \times u_3 \neq u_2^2$ ومنه (u_n) ليست هندسية.

ج) أ) البرهان بالتراجع أن: $u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

نسمي $P(n)$ الخاصية "$u_n > 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$"

من أجل $n = 1$: $u_1 = \frac{1}{4} > 0$ محققة

- نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$

من الفرض $u_n > 0$ وعليه $\frac{n}{4(n+1)} u_n > 0$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة

وعليه $P(n)$ صحيحة

ب) اتجاه التغير.

$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{4(n+1)} u_n - u_n = u_n\left(\frac{n - 4(n+1)}{4(n+1)}\right)$

$= u_n \times \frac{-3n-4}{4(n+1)}$.

لما أن $u_n > 0$ فإن $u_{n+1} - u_n < 0$ لأن $-3n - 4 < 0$.

وعليه (u_n) متناقصة تماما.

استنتاج التقارب وحساب النهاية.

(u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل وهي متقاربة.

يكافئ $(\frac{n}{4(n+1)})l - l = 0$ ومنه $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$

$l \times \frac{-3n-4}{4(n+1)} = 0$ يكافئ $l = 0$.

ج) $v_n = e^n \times n \times u_n$

أ- إثبات أن (v_n) هندسية حساب $v_{n+1} = q \cdot v_n$

$v_{n+1} = e^{n+1}(n+1) \cdot u_{n+1} = e^{n+1} \times (n+1) \times \frac{n}{4(n+1)} u_n$

$= \frac{e^n \times n \cdot u_n}{e} = \frac{v_n}{e}$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e}$ وحدها الأول

$v_1 = e^1 \times 1 \times u_1 = \frac{1}{2}$.

الجواب الرابع

I) $g(x) = (x^2-1)e^{-x} - 1$

1- حساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim x^2 e^{-x} - e^{-x} - 1 = -1$

$y=-1$ حادلة لمستقيم مقارب أفقي عند $+\infty$

2- قراءة بيانية لتحديد إشارة $g(x)$

(C_g) فوق (x') في المجال $[\alpha;+\infty[$ وتحته في $]-\infty;\alpha[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	−

II) $f(x) = 1 - x - (x+1)^2 e^{-x}$

1- حساب النهايات

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim 1 - x - x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2- تبيان أن (Δ) مقارب لـ (f)

$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to+\infty} [-(x+1)^2 e^{-x}]$

$= \lim_{x\to+\infty} [-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x}] = 0$

$y=-x+1$ حادلة لمستقيم مقارب مائل لـ (f) عند $+\infty$

ب) دراسة الوضعية

$f(x) - y = -(x+1)^2 e^{-x}$ ، لدينا $e^{-x} \neq 0$

$x+1=0$ يكافئ $x=-1$ وعليه

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		−	0	−	
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) يتقاطع مع (Δ) في $(-1;2)$		(C_f) تحت (Δ)

3- أ- تبيان أن: $f'(x) = g(x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f'(x) = -1 - [2(x+1)e^{-x} - e^{-x}(x+1)^2]$

$= -1 - e^{-x}(x+1)(2-x-1)$

$= -1 - e^{-x}(x+1)[-(x+1)]$

$= -1 + e^{-x}(x+1)^2 = g(x)$

ب- اتجاه التغير وجدول التغيرات

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وعليه:

f متزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

4- تبيان أن (C_f) يقبل مماسين حاملي توجيههما 1

$f'(x) = -1$ يكافئ $(x^2-1)e^{-x} = 0$ يكافئ $x^2=1$

$x=-1$ أو $x=1$ يكافئ.

لدينا $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$y = -x - 1 + e$: (Δ)

$y = -x + 1$

ولدينا $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$y = -(x-1) - 4e^{-1}$

$y = -x + 1 - 4e^{-1}$. (T)

5- تبيان أن (f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين β و 0

لدينا: $f(0) = 1 - 1 = 0$

ولدينا f مستمرة ومتزايدة تماما على $]-\infty;\alpha]$ فهي كذلك على $[-1,8;-1,7]$ ولدينا:

$f(-1,8) = -1,07$ و $f(-1,7) = 0,02$ ومنه $f(-1,8)f(-1,7) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β حيث $-1,8 < \beta < -1,7$

6- أ) الإنشاء.

ب) المناقشة البيانية:

$m=1$ يوجد حل وحيد، $m = 1-4e^{-1}$ يوجد حلان

$1-4e^{-1} < m < 1$ يوجد ثلاث حلول.

$m < 1-4e^{-1}$ يوجد حل وحيد

$m > 1$ لا توجد حلول.

عبارة v_n و u_n وبدلالة n وحساب $\lim u_n$

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ولدينا $v_n = 2^n \times n \times u_n$ ، ومنه $u_n = \frac{v_n}{2^n \times n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n \times n}$

$= \frac{1}{4^n \times n}$. $\lim u_n = \lim_n \frac{1}{4^n \times n} = 0$ ومنه

حساب S_n وتبيان أن $P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$

$S_n = \frac{4}{3}v_1 + \frac{16}{9}v_2 + \cdots + \frac{4^n}{3^n}v_n$

$\frac{4^n}{3^n} \times v_n = \frac{4^n}{3^2} \times \frac{1}{2^n} = \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$S_n = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$S_n = \frac{2}{3}\left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right] = 2\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$

$P_n = u_1 \times 2u_2 \times 3u_3 \times \cdots \times n u_n$

$n \times u_n = n \times \frac{v_n}{n \times 2^n} = \frac{v_n}{2^n}$.

$T_n = \frac{v_1}{2} \times \frac{v_2}{2^2} \times \cdots \times \frac{v_n}{2^n}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2^2} \times \cdots \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n}$

$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$= \left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\cdots+n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}(n+1)}$

$= \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{n^2+n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2+n}$

7) تعيين a و b حيث $x \mapsto (-x^2+ax+b)e^{-x}$
دالة اصلية لـ $(x+1)^2e^{-x}$.

$(-2x+a)e^{-x} - e^{-x}(-x^2+ax+b)$

$= e^{-x}(-2x+a+x^2-ax-b)$

$= e^{-x}(x^2-(a+2)x+a-b)$

بالمطابقة نجد $-(a+2)=2$ ومنه $a=-4$

$a-b=1$ وعليه $b=-5$

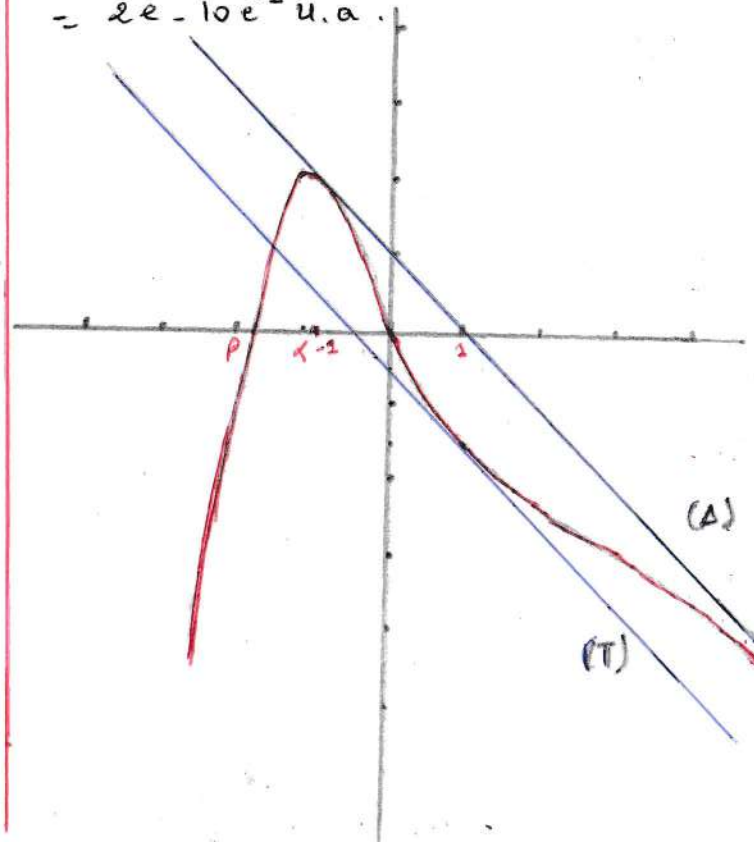
حساب المساحة المحدودة بـ $(\mathcal{C})$ ، (Δ) ، $x=1$ ، $x=-1$
$(\mathcal{C})$ تحت (Δ) ومنه :

$$S=\int_{-1}^{1}\left[(-x+1)-f(x)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x+1)^2e^{-x}dx=\left[(-x^2-4x-5)e^{-x}\right]_{-1}^{1}$$

$$=(-10e^{-1})-(-2e)$$

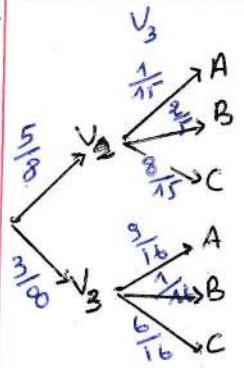
$$=2e-10e^{-1}\ u.a.$$



الموضوع II

الجواب الأول

2N 1B + N	2N 3B + B	3N 5B
V_3	V_2	V_1



1- شجرة الاحتمالات

$P_{V_2}(A) = \frac{A_3^2}{A_6^2} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

$P_{V_2}(B) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

$P_{V_3}(A) = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

$P_{V_3}(B) = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}$

2- حساب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(C)$

$P(A) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{15} + \frac{3}{8} \times \frac{9}{16} = \frac{97}{384}$.

$P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{16} = \frac{35}{128}$.

$P(C) = \frac{5}{8} \times \frac{8}{15} + \frac{3}{8} \times \frac{6}{16} = \frac{91}{192}$

ب- حساب $P_C(V_3)$

$P_C(V_3) = \frac{P(C \cap V_3)}{P(C)} = \frac{\frac{3}{8} \times \frac{6}{16}}{\frac{91}{192}} = \frac{27}{91}$

3- المتغير العشوائي

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$: ومنه NN → 0 ، BB → 2 ، BN → 1

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$P(X=0) = P(A) = \frac{97}{384}$	$P(X=1) = P(C) = \frac{91}{192}$	$P(X=2) = P(B) = \frac{35}{128}$

الأمل الرياضي : $E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P_i = \frac{49}{48} \approx 1,02$

4- إيجاد n حيث $P_{V_2}(B) = \frac{15}{28}$

$P_{V_2}(B) = \frac{A_{n+1}^2}{A_{n+3}^2} = \frac{(n+1)n}{(n+3)(n+2)}$ ، ومنه $(2N - nB) + 1B$

$\frac{n^2+n}{n^2+5n+6} = \frac{15}{28}$ ومنه : $28n^2 + 28n = 15n^2 + 75n + 90$

$13n^2 - 47n - 90 = 0$

$\Delta = 6889$ ومنه

$n_1 = \frac{47+83}{26} = 5$

$n_2 = \frac{47-83}{26} \notin \mathbb{N}$

ومنه $n = 5$

الجواب الثاني

I- حل المعادلة : $(\bar{z} - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ أو $\bar{z} - 2i = 0$

$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 4 = -4 = (2i)^2$ أو $\bar{z} = 2i$

ومنه $z = -2i$

$z_1 = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{2} = \sqrt{3} + i$

$z_2 = \bar{z}_1 = \sqrt{3} - i$

$S = \{-2i ; \sqrt{3}+i ; \sqrt{3}-i\}$

II- حساب $|z_A|$ ، $|z_C|$ ، $|z_D|$.

$|z_A| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

$|z_C| = |-2i| = 2$

$|z_D| = |-\bar{z}_A| = 2$

ومنه النقط A ، C ، D تنتمي الى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = 2$.

ب- كتابة $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسي

$\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \frac{\sqrt{3}+i+2i}{\sqrt{3}+i-2\sqrt{3}+2i} = \frac{\sqrt{3}+3i}{-\sqrt{3}+3i} \times \frac{-\sqrt{3}-3i}{-\sqrt{3}-3i}$

$= \frac{-3 - 3\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i + 9}{3+9} = \frac{6 - 6\sqrt{3}i}{12}$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

أ) طبيعة المثلث ABC

لدينا $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}\right) = -\frac{\pi}{3}$ و $\left|\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}\right| = 1$ ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ب) استنتاج العمدة للقطعة

لدينا أيضا $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ومنه $z_C - z_A = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$

وعليه C صورة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

أ- بيان أن $z_B + z_D = z_A + z_C$:

$z_B + z_D = 2\sqrt{3} - 2i - \sqrt{3} + i = \sqrt{3} - i$

$z_A + z_C = \sqrt{3} + i - 2i = \sqrt{3} - i$

ومنه $z_B + z_D = z_A + z_C$

طبيعة الرباعي ABCD

لدينا $\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{z_D + z_B}{2}$ وعليه الرباعي ABCD متوازي أضلاع ولدينا من السؤال 2- ABC متقايس الساقين ومنه الرباعي معين.

4- تعيين قيم $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ حقيقيا.

$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n = \left(\frac{4e^{i\frac{-\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^n = \left(2e^{i\frac{-\pi}{3}}\right)^n = 2^n e^{i\frac{-n\pi}{3}}$

ومنه $\frac{-n\pi}{3} = \pi k$ بكافئ $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n \in \mathbb{R}$

ومنه : $n = -3k$ حيث k عدد صحيح نسبي.

5- مجموعة النقط

التحقق أن θ ينتمي (Δ)

$z_O - z_B = -z_B = -4e^{i\frac{5\pi}{6}}$

ومنه $\theta \in (\Delta)$.

$z - z_B = re^{i\frac{5\pi}{6}}$

ومنه $\arg(z - z_B) = \arg\left(re^{i\frac{5\pi}{6}}\right)$

$(\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = 0 + \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

ومنه (Δ) هي نصف المستقيم [BO) ماعدا النقطة B.

الجواب الثالث

$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} \end{cases}$

1- البرهان بالتراجع أن $u_n > 1$:

- من أجل $n=0$: $u_0 = 3 > 1$ محققة
- نفرض أن $u_n > 1$ ومنه $3u_n > 3$ ومنه $3u_n + 4 > 7$ وعليه $\frac{1}{3u_n+4} < \frac{1}{7}$ ومنه $\frac{4}{3} - \frac{7}{3(3u_n+4)} > 1$ أي $\frac{-\frac{7}{3}}{3u_n+4} > -\frac{1}{3}$

$u_n > 1$: $\mathbb{N}$ من أجل كل n ، وعليه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1} > 1$ ومنه

ب) لجهة التغير

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n+3}{3u_n+4} - u_n = \frac{-3u_n^2+3}{3u_n+4}$$

$$= \frac{3(1-u_n)(1+u_n)}{3u_n+4}$$

لدينا $u_n > 1$ أي $1 - u_n < 0$ و $1 + u_n > 0$ ومنه $3u_n + 4 > 7$

$u_{n+1} - u_n < 0$ ،

وعليه (u_n) متناقصة قاما على $\mathbb{N}$

التقارب : (u_n) متناقصة ومكبورة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة .

ج- تبيان أن : $u_{n+1} - 1 < \frac{1}{7}(u_n - 1)$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n+3}{3u_n+4} - 1 = \frac{4u_n+3-3u_n-4}{3u_n+4}$$

$$= \frac{1}{3u_n+4}(u_n - 1)$$

لدينا $u_n > 1$ ومنه $3u_n + 4 > 7$ ، وعليه ، $\frac{1}{3u_n+4} < \frac{1}{7}$

وعليه ، $\frac{(u_n-1)}{3u_n+4} < \frac{1}{7}(u_n - 1)$

$$u_{n+1} - 1 < \frac{1}{7}(u_n - 1)$$

ب) تبيان أن : $u_n - 1 < 2\left(\frac{1}{7}\right)^n$:

لدينا :

$$0 < u_n - 1 < \frac{1}{7}(u_{n-1} - 1)$$
$$0 < u_{n-1} - 1 < \frac{1}{7}(u_{n-2} - 1)$$
$$\vdots$$
$$0 < u_1 - 1 < \frac{1}{7}(u_0 - 1)$$

بضرب المتباينات طرف لطرف نجد

$$0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{7}\right)^n (u_0 - 1)$$
$$0 < u_n - 1 < \left(\frac{1}{7}\right)^n \times 2 .$$

3- تبيان أن : $S_n < n + \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^n$

لدينا : $u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n \times 2 + 1$ ومنه

$u_0 < 2\left(\frac{1}{7}\right)^0 + 1$

$u_1 < 2\left(\frac{1}{7}\right)^1 + 1$

$\vdots$

$u_n < 2\left(\frac{1}{7}\right)^n + 1$

بجمع طرف لطرف نجد :

$$S_n < 2\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{7}}\right) + n + 1$$

$$S_n < 2\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}}{\frac{6}{7}}\right) + n + 1$$

$$S_n < \frac{7}{3} - \frac{7}{3} \times \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} + n + 1$$

$$S_n < \frac{10}{3} + n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}\right)^n$$

$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ /4

(v_n) هندسية حدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$ وأساسها $\frac{1}{7}$ ومنه (v_n)

حدها العام : $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$

ب) T_n حساب

$v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1}$: لدينا ، ومنه $\frac{1}{u_n+1} = -\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}$

$$T = \frac{1}{u_0+1} + \cdots + \frac{1}{u_n+1}$$

$$= -\frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2} + -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2} + \cdots + -\frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{2026}}{1 - \frac{1}{7}}\right)\right] + \frac{1}{2}(2026)$$

$$= -\frac{7}{24}\left(1 - \left(\frac{1}{7}\right)^{2026}\right) + 1013$$

الجواب الرابع

$g(x) = 2(x\sqrt{x} - 1) + \ln x$

I حساب $g(1)$ واشارة $g(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

وعليه $g(1) = 0$

II $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1$

1- حساب النهايات

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - x + 1 = -\infty \quad (\ln x \to +\infty,\ \sqrt{x} \to 0^+)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} - x + 1 = -\infty \quad (\ln x \to -\infty,\ x \to 0^+)$$

ومنه $x = 0$ معادلة لمستقيم مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$.

ج- تبيان أن (Δ) مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2\ln t}{t} = 0$$

ومنه $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مقارب (Δ) بجوار $+\infty$

ب) الوضع النسبي :

$\sqrt{x} > 0$ وعليه اشارة $f(x) - y$ من اشارة $\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - (-x+1)$	‖	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	$(\mathcal{C}_f)$ تحت (Δ)		$(\mathcal{C}_f)$ يقطع (Δ) في $(1;0)$		$(\mathcal{C}_f)$ فوق (Δ)

3- تبيان أن $f'(x) = \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} - 1$$

$$= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} - 1 = \frac{-2x\sqrt{x} + 2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

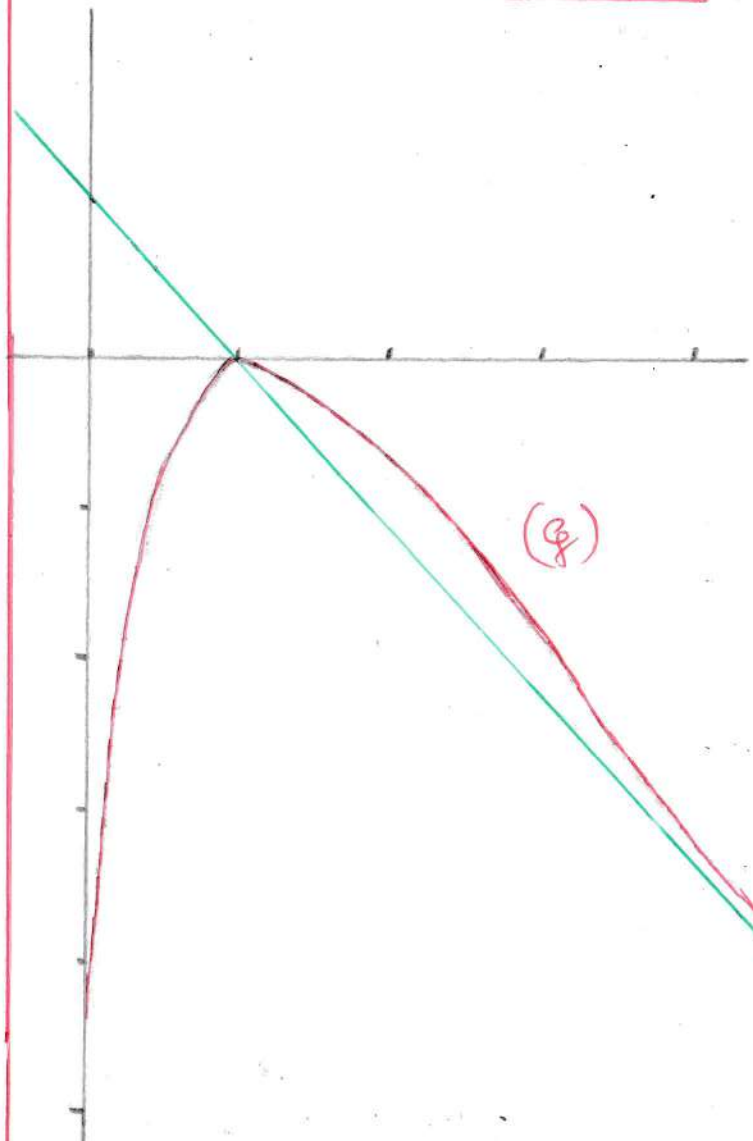
ب) اتجاه التغير وجدول التغيرات

$-g(x)$ إشارة $f'(x)$ من إشارة $2x\sqrt{x}>0$ ، ومنه

f متزايدة تماما على $[0,1]$ ، ومتناقصة تماما على $[1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↘	$-\infty$

4- الإنشاء



5) التكامل والتحليلة

$$\int_1^x \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$$

$u(x)=\ln t$ $\quad u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=\frac{1}{\sqrt{t}}$ $\quad v(x)=2\sqrt{t}$

ومنه

$$\int_1^x \frac{\ln t}{dt}\,dt=\left[2\sqrt{t}\ln t\right]_1^x-\int_1^x \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$=\left[2\sqrt{t}\ln t-4\sqrt{t}\right]_1^x$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+4.$$

ب) استنتاج $S(\alpha)$

حيث (Δ) تحت (C_f) ، $x=\alpha$ ، $x=1$ ، (Δ) ، (C_f)

$$S(\alpha)=\int_\alpha^1\left[(-x+1)-f(x)\right]dx$$

$$=-\int_\alpha^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=\left[2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+4\right]_1^\alpha$$

$$=2\sqrt{\alpha}\ln\alpha-4\sqrt{\alpha}+4.$$ ua

حساب $\lim_{\alpha\to 0} S(\alpha)$

بوضع $\alpha=t^2$ يعني $\sqrt{\alpha}=t$

$$\lim_{\alpha\to 0} S(\alpha)=\lim_{t\to 0} 4t\ln t-4t+4=4.$$

(0 و 0)

6) $h(x)=f(e^x)$

$h'(x)=e^x f'(e^x)$.

$f'(e^x)\geq 0$ بالفرض $e^x\leq 1$

ومنه

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$	$\|$	$+$	
$f'(e^x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	

و منه h متزايدة تماما على $]-\infty;0]$ ومتناقصة تماما على المجال $[0,+\infty[$

ولدينا

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty\\ \lfloor\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty\end{cases}\quad\text{و}\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\\ \lfloor\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=-\infty\end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

تابع ت 3 س ع - ب

حساب $\lim_n u_n$

لدينا: $0<u_n-1<2\left(\frac{1}{7}\right)^n$

ومنه

$$\lim_n 0<\lim_n(u_n-1)<\lim_n 2\left(\frac{1}{7}\right)^n$$

$$0<\lim(u_n-1)<0$$

$$\lfloor_n(u_n-1)=0$$ ومنه

$$\lfloor_n \lim u_n=1$$