

إختبار بكالوريا تجريبي 2025

شعبة : رياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول (4ن):

يحتوي كيس على ثلاث كرات تحمل الرقم 1 وثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكرة تحمل الرقم 3 .
(الكرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

(I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس .

(1) أحسب احتمال الأحداث التالية :

A : "الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم " .

B : "الحصول على كرتين تحملان عددين جداولهما زوجي " .

(2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha\beta}\right)$ ، بحيث : α و β يمثلان الرقمين الظاهرين على

الكرتين المسحوبتين .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم عرف قانون احتماله .

ب- أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

(II) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$. نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع الإرجاع .

أ- أحسب P_n احتمال الحصول على كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1 .

ب- عين أصغر عدد طبيعي n ، بحيث : $P_n \geq 0.92025$.

التمرين الثاني (4.5ن):

الجزءان الأول و الثاني مستقلان .

(I) نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $a_0 = 17$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n \equiv 7[10]$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\text{PGCD}(a_n; a_{n+1}) = 1$.

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

(4) استنتج رقم أحاد العدد $N = 2^{2^{2022}} + 2^{2^{2023}} + 2^{2^{2024}} + 2^{2^{2025}}$.

(II) x عدد طبيعي .

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$.

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 2025 يقسم $46^n + 1980n + 2024$.

التمرين الثالث (4.5ن):

(I) (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - (2\cos\theta)z + 1 = 0$. حيث θ عدد حقيقي غير معدوم .

(2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (E) بـ z_1 و z_2 . بين أن : $z_1^{2025} + z_2^{2025} = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_B = \overline{z_A}$.

(1) أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي .

ب- استنتج طبيعة المثلث OAB .

جـ- جد z_G للاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAB .

(2) S التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته 4 وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب- نسمي C صورة النقطة A بالتشابه S . بين أن لاحقة النقطة C هي: $z_C = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

جـ- أكتب z_C على الشكل الأسّي، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث: $3z\bar{z} - \sqrt{3}(z + \bar{z}) = 0$.
تحقق أن $A \in (\Gamma)$ ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) مع ذكر عناصرها المميزة.

التمرين الرابع (7ن):

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) (Γ) و (γ) التمثيلان البيانيان للدالتين $x \mapsto e^{x-1}$ و $x \mapsto 2x - x^2$.

(1) بقراءة بيانية حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (γ) على $\mathbb{R}$.

(2) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 - 2x + e^{x-1}$.

أحسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(3) تحقق أن: $0.28 < \alpha < 0.29$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - x^2 e^{1-x}$.
 (C_f) تمثيلها البياني.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$. ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{1-x} g(x)$ ،
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(4) بين أن: $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ، ثم أعط حصراً لـ $f(\alpha)$.

(5) أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f'(x) = 1$. ثم فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها.

ب- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.

(6) أحسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ كلاً من (Δ) ، (T) و (C_f) . (نأخذ: $f(\alpha) \approx 0.3$)

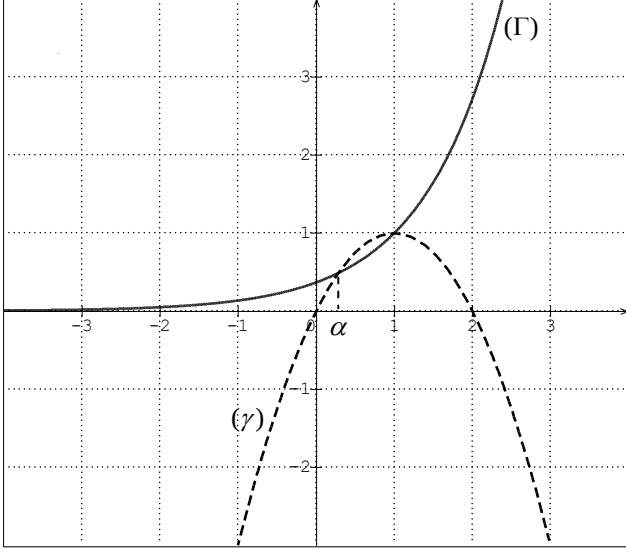
(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $x^2 = e^{m-1+x}$.

(III) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.

(2) استنتج كلاً من I_1 و I_2 . فسر I_2 بيانيا.

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$. ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.



الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

يمارس أحد الأشخاص الرياضة عادة . إذا مارس هذا الشخص الرياضة ، فإن احتمال أن يمارسها في اليوم التالي $\frac{1}{2}$.
وإذا لم يمارس الرياضة فإن احتمال ألا يمارسها في اليوم التالي $\frac{1}{4}$.
في اليوم الأول ، نفترض أن احتمال ممارسة هذا الشخص للرياضة يساوي أربعة أضعاف احتمال عدم ممارستها .
نعرف الحدث S_n احتمال أن يمارس الشخص الرياضة في اليوم n ونضع : $P(S_n) = P_n$.
(1) أحسب P_1 .

(2) بالاستعانة بشجرة الاحتمالات تحقق أن : $P_2 = \frac{11}{20}$.

(3) أثبت أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $P_{n+1} = \frac{1}{4}(3 - P_n)$.

(4) نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) بـ : $v_n = P_n - \frac{3}{5}$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ب- جد نهاية المتتالية (v_n) ، ثم استنتج نهاية المتتالية (P_n) .

التمرين الثاني (5ن):

(1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 9 .

(2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$.

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4S_n = 5^{n+1} - 1$.

ب- عين باقي قسمة S_{2025} على 9 .

ج- حدد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n \equiv 0 [9]$.

(3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5^n x - S_n y = 9$ (E_n) .

أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 5^n و S_n أوليان فيما بينهما .

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_n) .

(4) حدد الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $\begin{cases} 25x - 31y = 9 \\ PGCD(x; y) = 3 \end{cases}$.

(5) يحتوي كيس على ست كرات مرقمة ببواقي قسمة 5^n على 9 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس .

أ- أحسب احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي مجموع أرقام العدد 2025 .

ب- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرقب بكل سحب لكرتين عدد الأرقام الأولية المتبقية في الكيس .

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضيائي .

التمرين الثالث (4ن):

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bar{z} - 2 - 2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، B و C النقط من المستوي المركب لواحقتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = -z_A$ و $z_C = 2 - 2i$.

(1) أ- أكتب الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .

ب- استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

(2) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A \times z_C}{8}\right)^n = 1$.

(3) نعتبر الدوران R الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ- عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R .

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسّي.

ج- استنتج طبيعة المثلث ADB .

د- عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ADB .

(4) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .

عين (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

التمرين الرابع (7ن):

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2.

$f_n(x) = x - x^n \ln x$ ، $x > 0$ ومن أجل كل $f_n(0) = 0$ ب: $[0; +\infty[$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$.

(2) أ- أثبت أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين.

ب- بين أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ ، $f'_n(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$.

ج- بين أن الدالة f_n متزايدة على المجال $[0; 1]$ ومتناقصة على المجال $[1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ- حل في المجال $[0; +\infty[$ المعادلة: $f'_n(x) = 1$. ثم فسر النتيجة بيانيا.

ب- أكتب معادلة (T_n) مماس المنحنى (C_n) الموازي للمستقيم المنصف الأول.

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ لدينا: من أجل كل $x \in [0; +\infty[$ ، $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

ب- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

(5) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in]1; 2[$ حيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

(6) أنشئ بدقة كلا من (C_2) و (C_3) على المجال $[0; 2]$. (نأخذ: $\alpha_2 \approx 1.77$ و $\alpha_3 \approx 1.53$)

(7) أ- بين أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^n \ln x$ على المجال $[0; +\infty[$.

ب- λ عدد حقيقي حيث: $0 < \lambda < 1$ ، نضع: $S(\lambda) = \int_{\lambda}^1 [f_2(x) - f_3(x)] dx$.

أحسب $S(\lambda)$ بدلالة λ ، ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(\lambda)$ وفسر النتيجة هندسيا.

“ The only way to learn mathematics is to do mathematics ”

تصحيح مقترح للإختبار

حل مقترح للموضوع الأول

حل مقترح للموضوع الأول:

يحتوي كيس على ثلاث كرات تحمل الرقم 1 وثلاث كرات تحمل الرقم 2 وكرة تحمل الرقم 3 .
(I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من هذا الكيس .

عدد الإمكانيات : $C_7^2 = 21$.

(1) حساب احتمالات الأحداث :

$$P(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^1 + C_3^2}{21} = \frac{18}{21} , \quad P(A) = \frac{C_3^2 + C_3^2}{21} = \frac{6}{21}$$

(2) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $\cos\left(\frac{\pi}{\alpha\beta}\right)$ ، بحيث : α و β يمثلان الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحوبتين .

أ- قيم المتغير العشوائي X هي : $\left\{-1; 0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

$$P\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{21} = \frac{3}{21} , \quad P(X = 0) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{21} = \frac{9}{21} , \quad P(X = -1) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{1}{21}$$

$$P\left(X = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{C_1^1 \times C_3^1}{21} = \frac{3}{21} , \quad P\left(X = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{C_3^2}{21} = \frac{3}{21}$$

قانون الاحتمال :

X_i	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$P(X = X_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$

ب- حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = -1 \times \frac{3}{21} + 0 \times \frac{9}{21} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{21} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{3}{21} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{21} = \frac{-3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{42}$$

(II) n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$. نسحب من الكيس n كرة على التوالي مع الإرجاع .

أ- حساب P_n احتمال الحصول على كرة واحدة على الأقل تحمل الرقم 1 .

$$P_n = 1 - \overline{P}_n = 1 - \frac{4^n}{7^n} = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n$$

ب- تعيين أصغر عدد طبيعي n ، بحيث : $P_n \geq 0.92025$.

$$P_n \geq 0.92025 \text{ يكافئ } 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n \geq 0.92025 \text{ يكافئ } -\left(\frac{4}{7}\right)^n \geq -0.07975 \text{ يكافئ } \left(\frac{4}{7}\right)^n \leq 0.07975$$

$$\text{يكافئ } n \ln\left(\frac{4}{7}\right) \leq \ln(0.07975) \text{ يكافئ } n \geq \frac{\ln(0.07975)}{\ln\left(\frac{4}{7}\right)} \text{ أي } n \geq 4.52$$

ومنه أصغر عدد طبيعي n بحيث $P_n \geq 0.92025$ هو : 5 .

حل مقترح للموضوع الثاني:

الجزء الأول والثاني مستقلان .

(I) نعتبر المتتالية العددية (a_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $a_0 = 17$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2$.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n \equiv 7[10]$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \equiv 7[10]$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " $a_n \equiv 7[10]$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $a_0 = 17$ ومنه $a_0 \equiv 7[10]$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $a_n \equiv 7[10]$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $a_{n+1} \equiv 7[10]$.

لدينا حسب الفرض $a_n \equiv 7[10]$ ومنه $a_n - 1 \equiv 6[10]$ ومنه $(a_n - 1)^2 \equiv 6^2[10]$ ومنه $(a_n - 1)^2 \equiv 6[10]$.

ومن $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 \equiv 7[10]$ أي $a_{n+1} \equiv 7[10]$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n \equiv 7[10]$.

(2) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\text{PGCD}(a_n; a_{n+1}) = 1$.

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 = a_n^2 - 2a_n + 2$.

نضع: $d = \text{PGCD}(a_n; a_{n+1})$.

لدينا: $\begin{cases} d | a_n \\ d | a_{n+1} \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} d | a_n \\ d | (a_n^2 - 2a_n + 2) \end{cases}$ أي $d | [a_{n+1} - (a_n^2 - 2a_n)]$ أي $d | 2$ ومنه $d \in \{1; 2\}$.

لكن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \equiv 7[10]$ وبالتالي $d = 1$.

إذن: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $\text{PGCD}(a_n; a_{n+1}) = 1$.

(3) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $a_0 = 17 = 2^4 + 1 = 2^2 + 1 = 2^{2^0+2} + 1$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي: $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$ ، ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي $a_{n+1} = 2^{2^{n+3}} + 1$.

لدينا حسب الفرض $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$ ومنه $a_n - 1 = 2^{2^{n+2}}$ ومنه $(a_n - 1)^2 = [2^{2^{n+2}}]^2 = 2^{2 \times 2^{n+2}} = 2^{2^{n+3}}$ ومنه $(a_n - 1)^2 = 2^{2^{n+3}}$.

ومن $a_{n+1} = 1 + (a_n - 1)^2 = 1 + 2^{2^{n+3}} = 2^{2^{n+3}} + 1$. وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $a_n = 2^{2^{n+2}} + 1$.

(4) استنتاج رقم أحاد العدد $N = 2^{2^{2022}} + 2^{2^{2023}} + 2^{2^{2024}} + 2^{2^{2025}}$.

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n \equiv 7[10]$ ومنه $a_n - 1 \equiv 6[10]$ ولدينا: $N = a_{2020} - 1 + a_{2021} - 1 + a_{2022} - 1 + a_{2023} - 1$.

ومن $N \equiv 24[10]$ أي $N \equiv 4[10]$ وبالتالي رقم أحاد العدد N هو 4 .

(II) عدد طبيعي x .

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$.

طريقة ①: لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$.

نسمي $P(n)$ الخاصية " $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$ " .

• نتحقق من صحة $P(0)$.

من أجل $n = 0$ ، لدينا $(1+x)^0 = 1 \equiv 1[x^2]$ وبالتالي $P(0)$ صحيحة .

• نفرض صحة $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n أي : $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$ ، و نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $(1+x)^{n+1} \equiv (1+(n+1)x)[x^2]$.

لدينا حسب الفرض $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$ ومنه $(1+x)(1+x)^n \equiv (1+x)(1+nx)[x^2]$ ومنه $(1+x)^{n+1} \equiv (1+(n+1)x)[x^2]$ وبالتالي $P(n+1)$ صحيحة .

• الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n ، $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$ ، **طريقة ②** : يمكن استخدام دستور ثنائي الحد .

لدينا : $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1)^{n-k} = C_n^0 x^0 (1)^n + C_n^1 x^1 (1)^{n-1} + \sum_{k=2}^n C_n^k x^k (1)^{n-k} = 1 + nx + x^2 \sum_{k=2}^n C_n^k x^{k-2} (1)^{n-k}$ ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $(1+x)^n \equiv (1+nx)[x^2]$.

(2) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 2025 يقسم $46^n + 1980n + 2024$.

لدينا : حسب الجواب السابق وبوضع $x = 45$ ، نجد : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $(1+45)^n \equiv (1+45n)[45^2]$ ،

أي $46^n \equiv (1+45n)[2025]$ ومنه $46^n + 1980n + 2024 \equiv (2025 + 2025n)[2025]$ ،

وبالتالي : $46^n + 1980n + 2024 \equiv 0[2025]$.

إذن : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، 2025 يقسم $46^n + 1980n + 2024$.

حل مقترح للموضوع الثالث:

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - (2 \cos \theta)z + 1 = 0$. حيث θ عدد حقيقي غير معدوم .
لدينا : $\Delta = 4 \cos^2 \theta - 4 = -4 \sin^2 \theta = (2i \sin \theta)^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_2 = \frac{2 \cos \theta - 2i \sin \theta}{2} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{2 \cos \theta + 2i \sin \theta}{2} = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

(2) من أجل $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، نرمز إلى حلي المعادلة (E) بـ z_1 و z_2 . تبين أن : $z_1^{2025} + z_2^{2025} = 0$.

$$z_1^{2025} + z_2^{2025} = e^{i \frac{2025\pi}{6}} + e^{-i \frac{2025\pi}{6}} = 2 \cos \left(\frac{2025\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(169 \times 2\pi - \frac{3\pi}{6} \right) = 2 \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي لاحقتاهما على الترتيب : $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_B = \overline{z_A}$.

(1) أ- كتابة العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي .

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{i \frac{\pi}{3}}$$

ب- استنتاج طبيعة المثلث OAB .

$$\text{وبالتالي المثلث OAB متقايس الأضلاع .} \quad \left\{ \begin{array}{l} OB = OA \\ (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad \text{أي} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_A}{z_B} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_A}{z_B} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right.$$

ج- إيجاد النقطة G مركز ثقل المثلث OAB .

$$z_G = \frac{z_O + z_A + z_B}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) S التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته 4 و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ- الكتابة المركبة للتشابه S .

لدينا : $z' = 4e^{i\frac{\pi}{4}} z$.

ب- نسمي C صورة النقطة A بالتشابه S . تبين أن لاحقة النقطة C هي : $z_C = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

لدينا : $z_C = 4e^{i\frac{\pi}{4}} z_A = (2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{6} + i\sqrt{2} + i\sqrt{6} - \sqrt{2} = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$.

ج- كتابة z_C على الشكل الأسّي :

لدينا : $z_C = 4e^{i\frac{\pi}{4}} z_A = 4e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{6}} = 4e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

استنتاج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

لدينا : $z_C = 4e^{i\frac{5\pi}{12}} = 4 \cos \frac{5\pi}{12} + 4i \sin \frac{5\pi}{12}$ ومنه بالمطابقة مع الشكل الجبري نجد :
$$\begin{cases} \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $3z\bar{z} - \sqrt{3}(z + \bar{z}) = 0$.

التحقق أن $A \in (\Gamma)$:

لدينا : $3z_A\bar{z}_A - \sqrt{3}(z_A + \bar{z}_A) = 3 - \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 0$ ومنه $A \in (\Gamma)$.

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) مع ذكر عناصرها المميزة .

طريقة : من أجل $z = x + iy$.

$3z\bar{z} - \sqrt{3}(z + \bar{z}) = 0$ تكافئ $3(x^2 + y^2) - 2\sqrt{3}x = 0$ تكافئ $x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x + y^2 = 0$.

تكافئ $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ ومنه (Γ) هي الدائرة التي مركزها $G\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; 0\right)$ ونصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{3}$ وهي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB .

حل مقترح للموضوع الرابع:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(I) (Γ) و (γ) التمثيلان البيانيان للدالتين $x \mapsto e^{x-1}$ و $x \mapsto 2x - x^2$.

(1) بقراءة بيانية تحديد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (γ) على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
الوضع النسبي	(Γ) فوق (γ)		(Γ) تحت (γ)	
	(Γ) يقطع (γ) في النقطة ذات الفاصلة α		(Γ) يقطع (γ) في النقطة ذات الفاصلة 1	

(2) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = x^2 - 2x + e^{x-1}$.

حساب $g(1)$:

لدينا : $g(1) = 0$.

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
g(x)	+	0	-	+

(3) التحقق أن : $0.28 < \alpha < 0.29$.

لدينا : أي $\begin{cases} g(0.28) \approx 0.005 \\ g(0.29) \approx -0.004 \end{cases}$ أي $g(0.28) \times g(0.29) < 0$ ومنه $0.28 < \alpha < 0.29$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - x^2 e^{1-x}$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - x^2 e^{1-x}] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - x^2 e^{1-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 e^{-x} \times e] = +\infty$.

(2) تبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^2 e^{-x} \times e] = 0$ ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) - y = -x^2 e^{1-x}$ ومنه $f(x) - y \leq 0$ وبالتالي المنحنى (C_f) يقع أسفل المستقيم (Δ) .

(3) أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = e^{1-x} g(x)$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = e^{1-x} g(x)$ و $f'(x) = 1 - 2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = e^{1-x} (e^{x-1} - 2x + x^2) = e^{1-x} g(x)$.

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha; 1]$ ومتزايدة على كل من المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0	$+\infty$

(4) تبين أن : $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ، ثم إعطاء حصر لـ $f(\alpha)$.

لدينا : $g(\alpha) = 0$ ومنه $e^{\alpha-1} = 2\alpha - \alpha^2$ أي $e^{1-\alpha} = \frac{1}{2\alpha - \alpha^2}$ وبالتالي :

$$f(\alpha) = \alpha - \alpha^2 e^{1-\alpha} = \alpha - \alpha^2 \left(\frac{1}{2\alpha - \alpha^2} \right) = \alpha + \frac{\alpha}{\alpha - 2} = \alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$$

حصر $f(\alpha)$:

$$1.28 - \frac{2}{1.71} < \alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2} < 1.29 - \frac{2}{1.72} \text{ أي } \begin{cases} 1.28 < \alpha + 1 < 1.29 \\ -1.72 < \alpha - 2 < -1.71 \text{ ومنه } 0.28 < \alpha < 0.29 \\ \frac{1}{-1.71} < \frac{1}{\alpha - 2} < \frac{1}{-1.72} \end{cases}$$

أي : $0.11 < f(\alpha) < 0.12$.

(5) أ- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f'(x) = 1$.

لدينا $f'(x) = 1$ تكافئ $1 - 2xe^{1-x} + x^2 e^{1-x} = 1$ تكافئ $xe^{1-x} (x - 2) = 0$ تكافئ $\begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ تكافئ أو $\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

تفسير النتيجة المحصل عليها بيانيا :

حلول المعادلة $f'(x) = 1$ ، بيانيا هي فواصل النقط من المنحنى (C_f) والتي يكون فيها المماس معامل توجيهه 1 وبما أنه

للمعادلة $f'(x) = 1$ حلين فإن للمنحنى (C_f) مماسين في النقطتين اللتين فاصلتهما 0 و 2 على الترتيب معامل توجيههما 1.

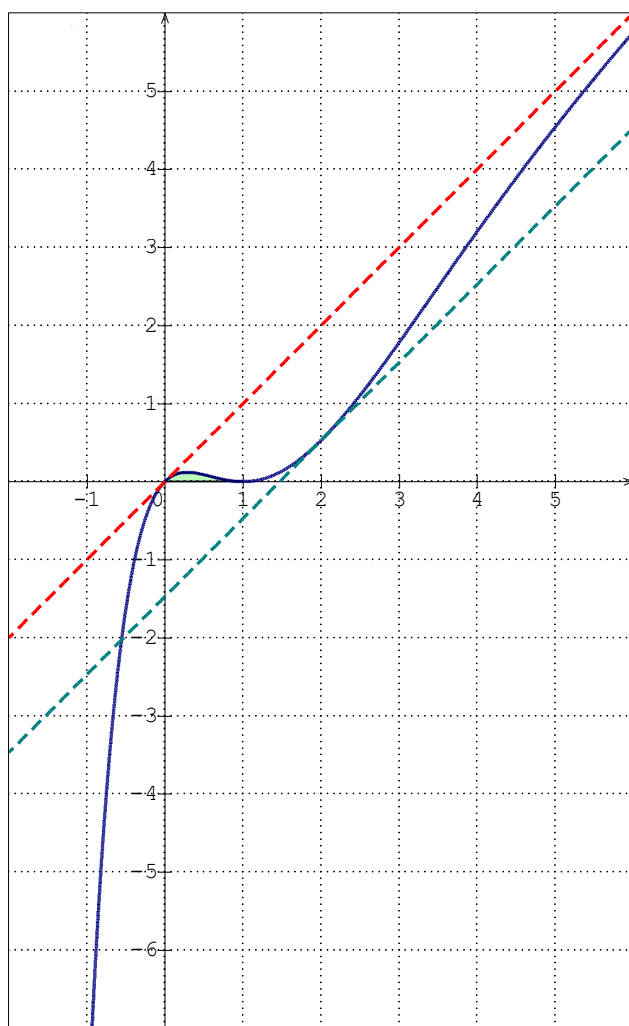
ب- كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.

لدينا : $(T) : y = f'(2)(x - 2) + f(2)$ ومنه $(T) : y = x - 4e^{-1}$.

(6) حساب $f(-1)$.

لدينا : $f(-1) = -1 - e^2 \approx -8.38$.

الرسم :



(7) المناقشة البيانية :

- لدينا : $x^2 = e^{m-1+x}$ تكافئ $e^m = x^2 e^{1-x}$ تكافئ $x - x^2 e^{1-x} = x - e^m$ تكافئ $f(x) = x - e^m$.
 حلول المعادلة $f(x) = x - e^m$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x - e^m$.
- من أجل $-e^m < -4e^{-1}$ أي $m > -1 + \ln 4$ المعادلة تقبل حل واحد .
 - من أجل $-e^m = -4e^{-1}$ أي $m = -1 + \ln 4$ المعادلة تقبل حلين .
 - من أجل $-4e^{-1} < -e^m < 0$ أي $m < -1 + \ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول .

(III) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$ ،
 لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ،

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} dx = \left[-x^{n+1} e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} dx = (n+1)I_n - 1$$

(2) استنتاج كلا من I_1 و I_2 .

$$I_2 = 2I_1 - 1 = 2e - 5 \text{ و } I_1 = I_0 - 1 = e - 2 \text{ و } I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx = \left[-e^{1-x} \right]_0^1 = -1 + e = e - 1$$

تفسير I_2 بيانيا :

لدينا : $I_2 = \int_0^1 x^2 e^{1-x} dx = \int_0^1 [x - f(x)] dx$ ومنه I_2 هو المساحة (بوحدة المساحة) للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $y = x$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

$$(3) \text{ إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

لدينا : من أجل كل $x \in [0;1]$ ، $1 \leq e^x \leq e$ ومنه $1 \leq e^{-x} \leq e^{-1}$ ومنه $1 \leq e^{1-x} \leq e$

$$\text{ومنه من أجل كل } n \in \mathbb{N} \text{ ، } x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e, \text{ ومنه } \int_0^1 x^n dx \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx$$

$$\text{ومنه } \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \text{ أي } \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} e \right]_0^1$$

استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n+1} = 0 \text{ ومنه حسب مبرهنة الحصر في النهايات } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

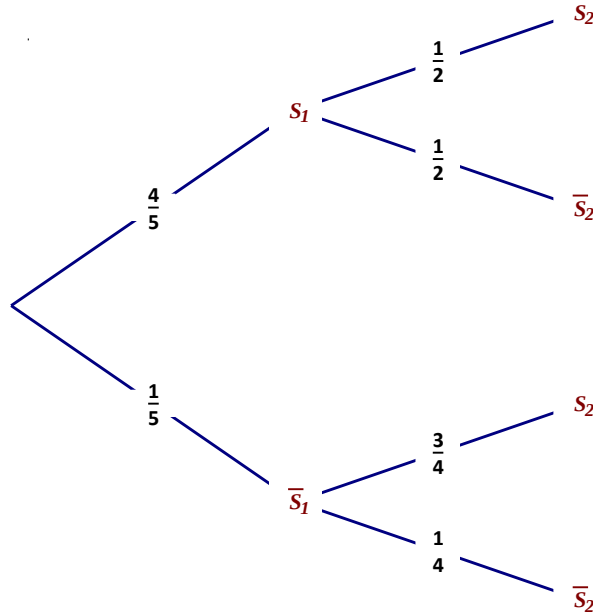
حل مقترح للموضوع الثاني

حل مقترح للموضوع الأول:

(1) حساب P_1 .

لدينا: $P_1 = \frac{4}{5}$.

(2) شجرة الاحتمالات:



استنتاج أن: $P_2 = \frac{11}{20}$.

لدينا: $P_2 = P(S_2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{10} + \frac{3}{20} = \frac{11}{20}$.

(3) إثبات أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = \frac{1}{4}(3 - P_n)$.

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P_{n+1} = P(S_{n+1}) = P(S_n \cap S_{n+1}) + P(\bar{S}_n \cap S_{n+1}) = P(S_n) \times P_{S_n}(S_{n+1}) + P(\bar{S}_n) \times P_{\bar{S}_n}(S_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}P(S_n) + \frac{3}{4}P(\bar{S}_n) = \frac{1}{2}P(S_n) + \frac{3}{4}(1 - P(S_n)) = \frac{1}{4}(3 - P(S_n)) = \frac{1}{4}(3 - P_n)$$

(4) نعرف على $\mathbb{N}^*$ المتتالية (v_n) بـ: $v_n = P_n - \frac{3}{5}$.

أ- إثبات أن (v_n) متتالية هندسية، مع تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{5} = \frac{1}{4}(3 - P_n) - \frac{3}{5} = \frac{3}{4} - \frac{3}{5} - \frac{1}{4}P_n = \frac{3}{20} - \frac{1}{4}P_n = -\frac{1}{4}\left(P_n - \frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{4}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$ وحدها الأول $v_1 = P_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$.

ب- إيجاد نهاية المتتالية (v_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right] = 0 \text{ وبالتالي } v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{5} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^* \text{ من أجل كل}$$

استنتاج نهاية المتتالية (P_n) .

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $v_n = P_n - \frac{3}{5}$ ومنه $P_n = v_n + \frac{3}{5}$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n + \frac{3}{5} \right) = \frac{3}{5}$.

حل مقترح للموضوع الثاني:

(1) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 9 .
لدينا : $5^0 \equiv 1[9]$ ، $5^1 \equiv 5[9]$ ، $5^2 \equiv 7[9]$ ، $5^3 \equiv 8[9]$ ، $5^4 \equiv 4[9]$ ، $5^5 \equiv 2[9]$ ، $5^6 \equiv 1[9]$ ومنه :

$n =$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n \equiv$	1	5	7	8	4	2	[9]

(2) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n$ ،

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4S_n = 5^{n+1} - 1$ ،

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $S_n = 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ ، ومنه $4S_n = 5^{n+1} - 1$ ،

ب- تعيين باقي قسمة S_{2025} على 9 .

لدينا : $4S_{2025} = 5^{2026} - 1 \equiv 4[9]$ و $5^{2026} = 5^{6(337)+4} \equiv 4[9]$ ومنه $5^{2026} - 1 \equiv 3[9]$ أي $4S_{2025} \equiv 3[9]$ ومنه $4S_{2025} \equiv 12[9]$ ومنه $4S_{2025} \equiv 3[9]$ ،

ومنه $S_{2025} \equiv 3[9]$ (لأن 9 و 4 أوليان فيما بينهما) وبالتالي باقي قسمة S_{2025} على 9 هو 3 .

ج- تحديد قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n \equiv 0[9]$.

لدينا : $S_n \equiv 0[9]$ معناه $4S_n \equiv 0[9]$ أي $5^{n+1} - 1 \equiv 0[9]$ أي $5^{n+1} \equiv 1[9]$ أي $n+1 = 6k$ أي $n = 6k - 1$ مع $k \in \mathbb{N}^*$.

(3) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5^n x - S_n y = 9$ (E_n) .

أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، 5^n و S_n أوليان فيما بينهما .

لدينا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $4S_n = 5^{n+1} - 1$ ، ومنه $5 \times 5^n - 4S_n = 1$ ومنه حسب مبرهنة بيزو ، 5^n و S_n أوليان فيما بينهما .

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_n) .

لدينا : باستغلال الجواب السابق ، الثنائية $(45; 36)$ حل خاص للمعادلة (E_n) ومنه $5^n x - S_n y = 5^n(45) - S_n(36)$ ،

أي : $5^n(x - 45) = S_n(y - 36)$ وهذا يعني أن $5^n | S_n(y - 36)$ ولدينا 5^n أولي مع S_n ومنه حسب مبرهنة غوص $5^n | (y - 36)$.

أي : $y - 36 = 5^n k$ إذن $y = 5^n k + 36$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، وبتعويض قيمة y في المعادلة نجد : $x = S_n k + 45$ ،

ومنه حلول المعادلة (E_n) هي : $(x; y) = (S_n k + 45; 5^n k + 36)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

(4) تحديد الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الطبيعية حيث : $\begin{cases} 25x - 31y = 9 \\ PGCD(x; y) = 3 \end{cases}$.

لدينا : حلول المعادلة $25x - 31y = 9$ (E_2) هي : $(x; y) = (31k + 45; 25k + 36)$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

ولدينا : $PGCD(x; y) = 3$ معناه $\begin{cases} x \equiv 3[9] \\ y \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 31k + 45 \equiv 3[9] \\ 25k + 36 \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 31k \equiv 3[9] \\ 25k \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 4k \equiv 3[9] \\ 7k \equiv 3[9] \end{cases}$ أي $\begin{cases} 8k \equiv 6[9] \\ 7k \equiv 3[9] \end{cases}$ ،

ومنه $k \equiv 3[9]$ أي $k = 9p + 3$ وبالتالي : $(x; y) = (279p + 138; 225p + 111)$ مع $p \in \mathbb{N}$.

(5) يحتوي كيس على ست كرات مرقمة ببواقي قسمة 5^n على 9 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس .

عدد الإمكانيات : $C_6^2 = 15$.

أ- حساب احتمال الحصول على كرتين مجموع رقميهما يساوي مجموع أرقام العدد 2025 .

معناه الحصول على كرتين مجموع رقميهما هو 9 معناه الحصول على : (4; 5) أو (2; 7) أو (1; 8) .

لدينا : $\frac{C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1 + C_1^1 \times C_1^1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

ب- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لكرتين عدد الأرقام الأولية المتبقية في الكيس .

القيم الممكنة لـ X هي : $\{1; 2; 3\}$.

لدينا : $P(X = 3) = \frac{C_3^2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ و $P(X = 2) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ و $P(X = 1) = \frac{C_3^2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

X_i	1	2	3
$P(X = X_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

حل مقترح للموضوع الثالث:

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(\bar{z} - 2 - 2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8) = 0$.

$$\text{لدينا : } (\bar{z} - 2 - 2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8) = 0 \text{ تكافئ أو } \begin{cases} \bar{z} - 2 - 2i = 0 \\ z^2 - 2\sqrt{2}z + 8 = 0 \end{cases} \text{ تكافئ أو } \begin{cases} z = 2 - 2i \\ z^2 - 2\sqrt{2}z + 8 = 0 \end{cases}$$

لنحل المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 8 = 0$.

لدينا : $\Delta = -24 = (2i\sqrt{6})^2$ ومنه للمعادلة حلين مركبين هما :

$$z_1 = \frac{2\sqrt{2} - 2i\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{6} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{2\sqrt{2} + 2i\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$$

إذن مجموعة حلول المعادلة $(\bar{z} - 2 - 2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 8) = 0$ هي : $S = \{2 - 2i; \sqrt{2} - i\sqrt{6}; \sqrt{2} + i\sqrt{6}\}$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{O}; \vec{u}, \vec{v})$.

A ، **B** و **C** النقطة من المستوي المركب لواقعها على الترتيب : $z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ ، $z_B = -z_A$ و $z_C = 2 - 2i$.
1) أ- كتابة الأعداد المركبة z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي :

$$z_A = \sqrt{2} + i\sqrt{6} = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_B = -z_A = 2\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{3} + \pi)} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$z_C = 2 - 2i = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

ب- لدينا : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 2\sqrt{2}$ ومنه النقطة **A** ، **B** و **C** تنتمي إلى الدائرة التي مركزها **O** ونصف قطرها $2\sqrt{2}$.

2) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون : $\left(\frac{z_A \times z_C}{8} \right)^n = 1$.

$$\text{لدينا : } \left(\frac{z_A \times z_C}{8} \right)^n = e^{i\frac{n\pi}{12}} \text{ ومنه } \left(\frac{z_A \times z_C}{8} \right)^n = 1 \text{ يكافئ } \arg \left(\frac{z_A \times z_C}{8} \right) = 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ أي : } \frac{n\pi}{12} = 2k\pi$$

ومنه $n = 24k / k \in \mathbb{N}$. ومنه .

3) **R** الدوران الذي مركزه **O** وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

أ- تعيين z_D لاحقة النقطة **D** صورة النقطة **C** بالدوران **R** :

$$\text{لدينا : } z_D = e^{i\frac{\pi}{4}} z_C = 2\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$

ب- كتابة العدد المركب $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي .

$$\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} + i\sqrt{6} - 2\sqrt{2}} = \frac{-3\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{-\sqrt{2} + i\sqrt{6}} = \frac{(-3\sqrt{2} - i\sqrt{6})(-\sqrt{2} - i\sqrt{6})}{8} = i\sqrt{3} = \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

جـ- إستنتاج طبيعة المثلث ADB .

$$\left\{ \begin{array}{l} DB = \sqrt{3}DA \\ \overline{(DA; DB)} = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{يكافئ} \left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} \right| = \sqrt{3} \\ \arg\left(\frac{z_B - z_D}{z_A - z_D}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\text{لدينا : } \frac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ يكافئ}$$

وبالتالي المثلث ADB قائم في D .

د- تعيين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ADB :

$$\text{لدينا : } z_G = \frac{z_A + z_B + z_D}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(4) لتكن M نقطة كيفية من المستوي لاحقتها z حيث M تختلف عن A وتختلف عن C .

تعيين (E) مجموعة النقط M التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_C - z}$ عددا حقيقيا سالبا تماما :

$$\arg\left(\frac{z_A - z}{z_C - z}\right) = \pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \text{ معناه } \frac{z_A - z}{z_C - z} \in \mathbb{R}^-$$

ومنه مجموعة النقط هي قطعة المستقيم المفتوحة AC .

حل مقترح للموضوع الرابع:

n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 .

f_n الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f_n(0) = 0$ ومن أجل كل $x > 0$ ، $f_n(x) = x - x^n \ln x$.

(1) تبين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$.

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - x^n \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 - x^{n-1} \ln x)] = -\infty$$

(2) أ- إثبات أن الدالة f_n قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين .

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 - x^{n-1} \ln x] = 1$$

$$\text{و } (f'_n)_d(0) = 1$$

ب- تبين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f'_n(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$.

$$\text{الدالة } f'_n \text{ قابلة للإشتقاق على المجال }]0; +\infty[\text{ و } x \in]0; +\infty[\text{ و } f'_n(x) = 1 - nx^{n-1} \ln x + \frac{1}{x} \times (-x^n) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$$

ج- تبين أن الدالة f_n متزايدة على المجال $[0; 1]$ ومتناقصة على المجال $[1; +\infty[$:

$$\text{لدينا : من أجل كل } x \in]0; 1[\text{ ، يكون } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x \leq 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 0 \leq x^{n-1} \leq 1 \\ x^{n-1} \ln x \leq 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 1 - x^{n-1} \geq 0 \\ -nx^{n-1} \ln x \geq 0 \end{cases} \text{ أي } f'_n(x) \geq 0 \text{ وبالتالي}$$

الدالة f_n متزايدة على المجال $[0; 1]$.

$$\text{ولدينا : من أجل كل } x \in [1; +\infty[\text{ ، يكون } \begin{cases} x \geq 1 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} x^{n-1} \geq 1 \\ x^{n-1} \ln x \geq 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 1 - x^{n-1} \leq 0 \\ -nx^{n-1} \ln x \leq 0 \end{cases} \text{ أي } f'_n(x) \leq 0$$

وبالتالي الدالة f_n متناقصة على المجال $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f_n :

x	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0
$f_n(x)$		0	1
		↗	↘
		0	$-\infty$

(3) أ- حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة : $f'_n(x) = 1$.

لدينا : $f'_n(x) = 1$ تكافئ $1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x = 0$ تكافئ $x^{n-1} + nx^{n-1} \ln x = 0$ تكافئ $x^{n-1}(1 + n \ln x) = 0$

تكافئ $1 + n \ln x = 0$ تكافئ $\ln x = -\frac{1}{n}$ تكافئ $x = e^{-\frac{1}{n}}$.

تفسير النتيجة بيانيا :

المنحنى (C_n) يقبل في النقطة ذات الفاصلة $x = e^{-\frac{1}{n}}$ مماسا موازيا للمستقيم المنصف الأول .

ب- كتابة معادلة لـ (T_n) مماس المنحنى (C_n) الموازي للمستقيم المنصف الأول :

لدينا : $(T_n) : y = x - e^{-\frac{1}{n}} + f(e^{-\frac{1}{n}})$ ومنه $(T_n) : y = x + \frac{1}{ne}$.

(4) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ لدينا : من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ،

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x - x^{n+1} \ln x - (x - x^n \ln x) = x^n(1 - x) \ln x$$

إشارة الفرق من إشارة $(1 - x) \ln x$.

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
$\ln x$	-	0	+
$f_{n+1}(x) - f_n(x)$	-	0	-

إذن : من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ لدينا : من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

ب- استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) .

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، ومن أجل كل $x \in]0; +\infty[$ ، $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.

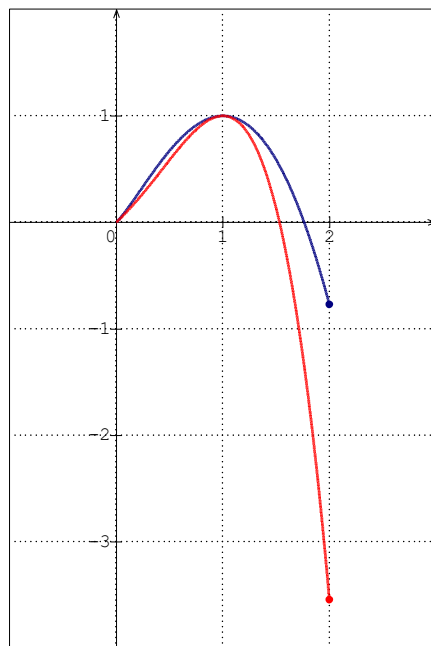
ومن المنحنى (C_{n+1}) يقع يقع أسفل المنحنى (C_n) . و (C_n) و (C_{n+1}) يتقاطعان في النقطة $A(1; 1)$.

(5) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in]1; 2[$ حيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

لدينا : من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ، ومن أجل كل $x \in]1; +\infty[$ ، الدالة f_n متناقصة تماما و $]1; 2[\subset]1; +\infty[$.

و $\alpha_n \in]1; 2[$ أي $\begin{cases} f_n(1) = 1 \\ f_n(2) = 2 - 2^n \ln 2 < 0 \end{cases}$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n \in]1; 2[$ حيث $f_n(\alpha_n) = 0$.

(6) الرسم :



(7) أ- تبيان أن الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^n \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و

$$\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} \right)' = x^n \ln x + \frac{1}{n+1} x^n - \frac{1}{n+1} x^n = x^n \ln x$$

ومنه الدالة $x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^n \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- λ عدد حقيقي حيث: $0 < \lambda < 1$ ، نضع: $S(\lambda) = \int_{\lambda}^1 [f_2(x) - f_3(x)] dx$.

حساب $S(\lambda)$ بدلالة λ :

$$\begin{aligned} S(\lambda) &= \int_{\lambda}^1 [f_2(x) - f_3(x)] dx = \int_{\lambda}^1 [x^3 \ln x - x^2 \ln x] dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 - \frac{1}{3} x^3 \ln x + \frac{1}{9} x^3 \right]_{\lambda}^1 \\ &= \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \lambda^4 \ln \lambda + \frac{1}{16} \lambda^4 + \frac{1}{3} \lambda^3 \ln \lambda - \frac{1}{9} \lambda^3 \end{aligned}$$

حساب $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(\lambda)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \lambda^4 \ln \lambda + \frac{1}{16} \lambda^4 + \frac{1}{3} \lambda^3 \ln \lambda - \frac{1}{9} \lambda^3 \right] = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$$

تفسير النتيجة هندسيا:

العدد $\frac{7}{144}$ يمثل بالضبط المساحة (بوحد المساحة) للحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_2) و (C_3) .



نشر يوم : 2025.05.15

لا أسمح بالنسخ ولا بالتعديل ولا استعمال هذا العمل لأغراض تجارية