

الإختبار الأول في مادة الرياضيات

التمرين الاول : (10 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على IN بـ : $u_0 = \alpha$ ، $\alpha \in IR$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{2}$

- عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .
- نضع $u_0 = 1$
- 1. أحسب الحدود u_1, u_2 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- 2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n < 2$.
- برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - 2$.
- 1. بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ يطلب حساب حدها الأول .
- 2. أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.
- 3. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 4. ليكن المجموعين S_n و S'_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
- أحسب المجموع S_n واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S'_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n - 2$.

التمرين الثاني : (10 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $IR - \{-1\}$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

(C_f) التمثيل البياني لدالة f في المستوى المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $IR - \{-1\}$ فإن : $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقاربا مائلا .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(4) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(5) أكتب معادلة المستقيم (D) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$

(6) بين أن النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

(7) أ) أحسب $f(0)$ ثم أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمماس (D) .

ب) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة حلين متميزين .

(8) h الدالة المعرفة على $]-1; 1[$ ب : $h(x) = \frac{x^2}{1-|x|}$ ، (Ch) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

- أثبت أن الدالة h زوجية .

- تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; 0]$ ، $h(x) = f(x)$.

- اشرح كيف يمكن إنشاء المنحنى (Ch) انطلاقا من (C_f) ثم أنشئه .

وفقكم الله.

التصحيح النصوصي للاختبار الفصل الأول في مادة الرياضيات

المسألة الأولى : 10 نقاط

$$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{2} ; U_0 = \alpha$$

(U_n) متتالية تعني من أجل كل n من $\mathbb{N}$

$$U_{n+1} = U_n = U_0 = \alpha$$

$$\alpha = \frac{3}{4} \alpha + \frac{1}{2}$$

$$\alpha - \frac{3}{4} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\alpha = 2}$$

معناه :

04

$$U_{n+1} = \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{2}$$

$$U_0 = 1$$

$$U_1 = \frac{3}{4} U_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$$

$$U_2 = \frac{3}{4} U_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{15}{16} + \frac{8}{16} = \frac{23}{16}$$

نلاحظ : $U_0 < U_1 < U_2$ فإن المتتالية (U_n) متزايدة كما ما .

(2) من أجل كل n من $\mathbb{N}$ إن $U_n < 2$:
 • من أجل $n=0$: $1 < 2$ أي $U_0 < 2$ ومنه الخاصية $P(0)$ صحيحة .
 • نضرب الآن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل n عدد طبيعي كيفي ونثبت صحتها من أجل $n+1$.

$$\text{لدينا : } U_n < 2 \text{ ومنه : } \frac{3}{4} U_n < \frac{3}{2} \text{ أي } \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$U_{n+1} < 2 \text{ أي } \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

ومنه : $P(n+1)$ صحيحة .

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_n < 2$.

3- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{2} - U_n = \frac{3U_n + 2 - 4U_n}{4} = \frac{-U_n + 2}{4}$$

لدينا : $U_n < 2$ ومنه : $-U_n > -2$ ومنه :

$$U_{n+1} - U_n > 0 \text{ أي } \frac{-U_n + 2}{4} > 0$$

ومنه : المتتالية (U_n) متزايدة كما ما .
 • المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة
 كما ما فإنها متقاربة .

$$V_n = U_n - 2$$

1- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2 = \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{3}{4} U_n + \frac{1}{2} - \frac{4}{2} = \frac{3}{4} U_n - \frac{3}{2}$$

$$U_n = V_n + 2 \text{ ومنه : } V_n = U_n - 2$$

$$V_{n+1} = \frac{3}{4} (V_n + 2) - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{4} V_n + \frac{6}{4} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{4} V_n + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$$

$$V_{n+1} = \frac{3}{4} V_n$$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$

$$V_0 = U_0 - 2 = 1 - 2 = -1$$

2- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$V_n = V_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = -\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

استنتاج مباشرة U_n بدلالة n :

$$U_n = V_n + 2 = -\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$$

$$= 2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

3-

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 2$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ : يكافئ : } -1 < \frac{3}{4} < 1$$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}\right)$$

$$= -1 \left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{3}{4} - 1}\right) = -\left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{4}}\right) = 4 \left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$$

$$S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

$$= (V_0 + 2) + (V_1 + 2) + \dots + (V_n + 2)$$

$$= V_0 + V_1 + \dots + V_n + (2 + 2 + \dots + 2)_{n+1 \text{ مرة}}$$

$$(x+1)^2 > 0$$

015 $x(n+2) = 0$ في $x=0$ أو $x=-2$.

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$-$	$+$

015 الدالة f متزايدة تماماً على المجالين $[-2; -1]$ و $[0; +\infty[$ وناقصة تماماً على المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty[$.

015 جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-4	$+$	0	$+\infty$

5 - معادلة المماس (D) عند $x_0 = 1$:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4}x - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

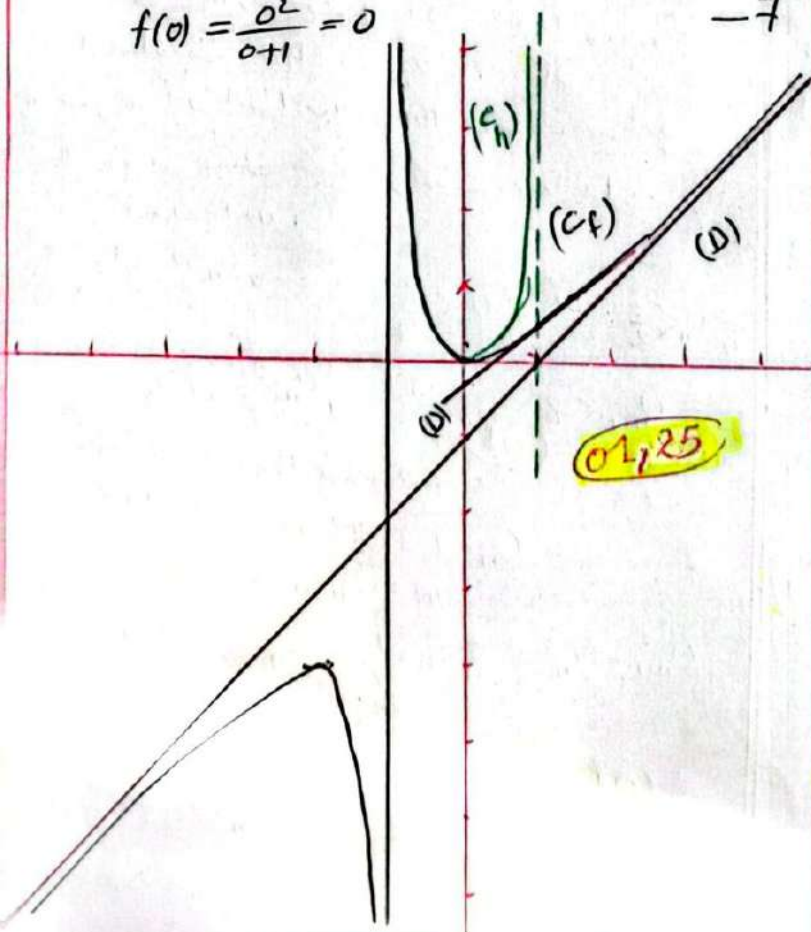
6 - من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ من $-2-x$ من $\mathbb{R} - \{-1\}$ و

$$f(-2-x) + f(x) = -2-x-1 + \frac{1}{-2-x+1} + x-1 + \frac{1}{x+1}$$

$$= -4 + \frac{1}{-x-1} + \frac{1}{x+1} = -4 + 2(-2)$$

وضعه $A(-1; -2)$ في مركزناظر للزمن (C_f) .

$$f(0) = \frac{0^2}{0+1} = 0$$



$$S'_n = S_n + 2(n+1)$$

$$= 4\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right) + 2n+2$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - 4 + 2n+2$$

$$S'_n = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2n-2$$

التمرين الثاني: (10 نقاط)

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} : D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\frac{1}{x+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\frac{1}{x+1}} = -\infty$$

التحليل الكندي: (C_f) يقبل صيغ مقارب بوازي دحور التراتيب معادلة $x = -1$.

ع - من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= x-1 + \frac{1}{x+1}$$

13 - من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x-1 + \frac{1}{x+1} - (x-1)\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

وكذلك بنسب القربية $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x-1)) = 0$

ب - من أجل كل x من D_f :

$$f(x) - y = f(x) - (x-1) = \frac{1}{x+1}$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y$		$-$	$+$
الوضع النبي		تحت (D)	فوق (D)

4 - الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1 \cdot x^2}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

ب - إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x+2)$:

ب - حلول المعادلة $f(x) = m$ هي خواص
 تقاطع (4) مع المستقيم وللمعادلة $y = m$
 كما $m < -4$ أو $m > 0$ المعادلة **0125** لا
 حدين منها يرضى .

$$h(x) = \frac{x^2}{1-x^2} ; D =]-1; 1[\quad \text{0125} \quad - 8$$

• من أجل كل x من $] -1; 1[$; $-x$ من $] -1; 1[$

$$h(-x) = \frac{(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{x^2}{1-x^2} = h(x) \quad (|-x| = |x|)$$

ومنه الدالة h زوجية .

• من أجل كل x من $] -1; 0[$; $|x| = -x$

$$h(x) = \frac{x^2}{1-(-x)} = \frac{x^2}{1+x} = f(x) \quad \text{0125}$$

• كما $x \in] 0; 1[$ - ينطبق (C_h) مع المنحنى (f)

وكما $x \in [1; +\infty[$: نغير (C_h) بالتي

لعموم الترتيب **0125**

لأساس (C_h) **0125**