الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

ثانوية زروقي الشيخ بن الدين — الشعبة : سنة ثالثة تسيير و إقتصاد

اختبار في مادة الرياضيات — المدة : ساعتين

التمرين الأول

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_1=-2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n-2<0$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{2}u_n+1$.

ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و بين انها متقاربة.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n=2u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

- عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ ثم احسب حدها الأول v_1.

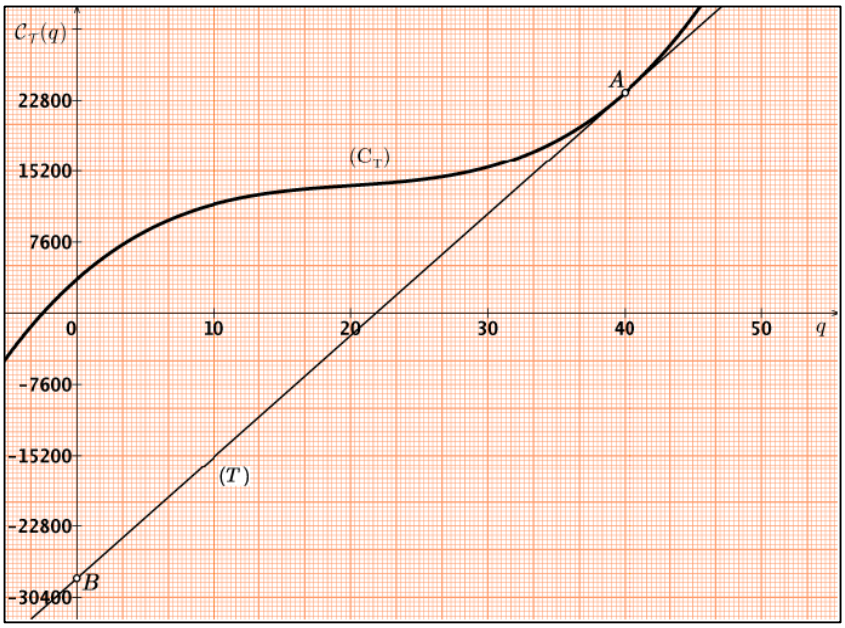
نضع في كل مما يلي : $\alpha=-4$.

أ- اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n و احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

ب- احسب بدلالة n المجموع : $S_n=u_1+u_2+\quad+u_n$.

التمرين الثاني

التمثيل البياني (C_T) المقابل هو لدالة الكلفة الإجمالية C_T و هي لمصنع ينتج مواد أولية للبناء ، الوحدات المنتجة q مقدرة بآلاف الأطنان حيث $q\in[0,50]$ و الكلفة مقدرة بمئآت الدنانير ، (T) مماس للمنحنى (C_T) في النقطة $A(40,23600)$ و يقطع حامل محور التراتيب في النقطة $B(0,-28400)$.



1. بقراءة بيانية :

أ- ماهي كلفة إنتاج 40 ألف طن من المنتوج.

ب- احسب $C_T'(40)$.

ج- اكتب معادلة المماس (T).

2. اذا علمت أن :

$C_T(q)=q^3-60q^2+1300q+3600$

عين دالة الكلفة الهامشية C_m.

I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \left]0,\frac{1}{2}\right[$.
3. استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ : $f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;i,j)$.

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.
3. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (Δ).
4. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1,+\infty[$ بـ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

ب-استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

5. ارسم (Δ) و (C_f).

تصحيح اختبار الفصل الأول

التمرين الأول :

① البرهان بالتراجع:

نضع $p(n): u_n - 2 < 0$

- من أجل $n = 1$: $u_1 - 2 < 0$ أي $-4 < 0$ صحيحة.

ومنه $p(1)$ محققة. 0,25

- نفرض أن $p(n)$ صحيحة ونبرهن أن $p(n+1)$ صحيحة:

$p(n+1): u_{n+1} - 2 < 0$

لدينا: $u_n - 2 < 0$ أي $\frac{1}{2}u_n - 1 < 0$ أي $\frac{1}{2}u_n - 1 + 2 < 2$

أي $u_{n+1} - 2 < 0$ ومنه $p(n+1)$ صحيحة. 0,75

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$u_n - 2 < 0$.

② ① = التحقق: 0,5

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1$

② الرتابة =

$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}u_n + 1 = -\frac{1}{2}(u_n - 2)$

$-\frac{1}{2} < 0$ و $u_n - 2 < 0$ 0,5

ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن:

المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

- التقارب: بما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة. 0,5

③ تعيين قيمة α:

$v_{n+1} = 2u_{n+1} + \alpha = 2\left(\frac{1}{2}u_n + 1\right) + \alpha$

$v_{n+1} = u_n + 2 + \alpha = \frac{v_n - \alpha}{2} + \alpha + 2$

$= \frac{1}{2}v_n + \frac{\alpha + 4}{2}$ 0,5

حتى تكون (v_n) متتالية هندسية،

$\frac{\alpha + 4}{2} = 0$ أي $\alpha + 4 = 0$ أي $\alpha = -4$.

- حساب حدها الأول v_1 :

$v_1 = 2u_1 - 4 = 2(-2) - 4 = -8$ 0,5

④ كتابة v_n بدلالة n :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = -8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 0,5

⑤ كتابة u_n بدلالة n:

$u_n = \frac{v_n + 4}{2} = \frac{-8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 4}{2}$ 0,5

$= -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2$ 0,5

- حساب نهاية u_n:

$\lim_{n \to +\infty} -4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 = 2$ 0,5

⑥ حساب المجموع S_n :

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

$= \frac{v_1 + 4}{2} + \frac{v_2 + 4}{2} + \cdots + u_n$

$= \frac{1}{2}\left(v_1 + v_2 + \cdots + v_n + 4 + \cdots + 4\right)$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{v_1}{1-q}\left(1 - q^n\right) + 4n\right]$ 0,5

$= -8\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 2n$ 0,5

التمرين الثاني :

① ① الكلفة انتاج 40 آلة هي: 23600,00 دينار

② حساب $C_T'(40)$:

$C_T'(40) = \frac{-28400 - 23600}{0 - 40} = 1300$ 1

② كتابة معادلة المماس (T):

$y_T = C_T'(40)(q - 40) + C_T(40)$

$= 1300(q - 40) + 23600$ 1

$= 1300q - 28400$

② دالة الكلفة الحدية C_m :

$C_m(q) = C_T'(q) = 3q^2 - 120q + 1300$ 1

التمرين الثالث :

① اتجاه تغير الدالة g:

$g'(x) = 3x^2 + 6x + 3$ ، نجد $\Delta = 0$. 0,5

$g'(x) = 0$ معناه: $x = -1$. 0,5

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	

الدالة g متزايدة تماما. 0,5

② بما أن g مستمرة ومتزايدة تماما على $[0, \frac{1}{2}]$

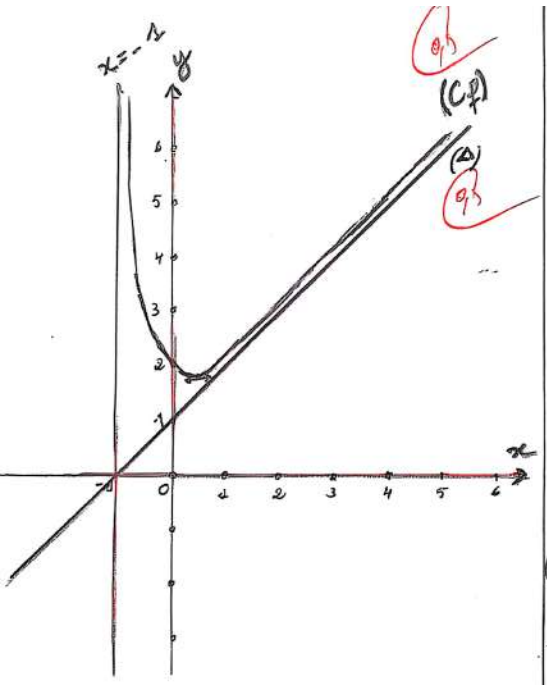
$g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ 0,75

$= -1 \quad = 1,37$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α.

③ اشارة $g(x)$: 0,5

x	-1	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$



0,5

0,5

$$f'(x)=\frac{(x+1)[(3x^2+6x+3)(x+1)-2(x^3+3x^2+3x+2)]}{(x+1)^4}$$

$$=\frac{3x^3+6x^2+3x+3x^2+6x+3-2x^3-6x^2-6x-4}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x-1}{(x+1)^3}$$

$$=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

0,5

② استنتاج اتجاه تغير f:

x	-1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$(x+1)^3$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة تماما على $]-1,\alpha]$ و متزايدة تماما على $[\alpha,+\infty[$.

0,5

- جدول التغيرات:

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

1

$f(\alpha) \simeq 1,89$

II ① حساب النهايات:

$$\lim_{x\to -1} x+1+\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$$ 0,5

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x=-1$.

0,25

$$\lim_{x\to +\infty} x+1+\frac{1}{(x+1)^2}=+\infty$$ 0,5

② بيان أن المستقيم (Δ) مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} x+1+\frac{1}{(x+1)^2}-(x+1)$$

0,5

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{(x+1)^2}=0$$

و منه (Δ) مستقيم مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

③ الوضع النسبي:

$$f(x)-y=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

0,25

x	-1		$+\infty$
$f(x)-y$	‖	$+$	
الوضع النسبي	‖	(C_f) فوق (Δ)	

0,5

④ بيان أن: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$

لدينا:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$$

0,75

لدينا:

$$f'(x)=\frac{(3x^2+6x+3)(x^2+1)-2(x+1)(x^3+3x^2+3x+2)}{(x+1)^4}$$