الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2025-2026

ثانوية ناصري رمضان -الطاهير — المستوى: الأولى - ج م ع ت

الواجب المنزلي رقم 01 في مادة الرياضيات

سُلّم يوم: 2025-10-16 — يُستلم يوم: 2025-10-21

التمرين الأول:

1/ نضع: $A = \sqrt{4-\sqrt{7}} - \sqrt{4+\sqrt{7}}$.

أُحسب A^2، ثم اِستنتج شكل مُبسّط لـ A محدّدًا طبيعته.

2/ أُكتب كلا من الأعداد التالية على أبسط شكل ممكن، ثم عين طبيعة كل منها:

$$B = \frac{(-12)^8 \times 75^4 \times (-4)^{-9} \times (-1)^{2026}}{(25^{-2})^{-4} \times 18^6 \times 10 \times (-1)^{2025}}$$

$$C = \sqrt{\frac{605}{70}} \times \sqrt{\frac{14}{(-7)^2}} \qquad D = \sqrt{\frac{27^{10}+9^{10}}{27^4+9^{11}}}$$

$$E = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{1+\sqrt{2}}} \qquad F = \frac{5}{2} \times \frac{\frac{2}{3}-\frac{2}{6}}{2-\frac{1}{3}}$$

$$G = \left(-\frac{1962}{2025}\right)^{1447} \times \left(\frac{1962}{2025}\right)^{-1447}$$

3/ أُكتب الأعداد: $x = 3^4$ وَ $y = 1954 \times 10^{-9}$ وَ $z = -0.0020256$ على الشكل العلمي،

ثم أعط رتبة مقدار العددين: $x \times y$ و $\frac{z}{y}$.

4/ أعط المدور إلى الوحدة ثم إلى 10^{-2} ثم إلى 10^{-5} للأعداد: $-\sqrt{2}$ وَ $\frac{11}{7}$ وَ $E \times F$.

5/ أُكتب على الشكل الكسري العددين الناطقين التاليين:

$a = 3,1\underline{72}\cdots$; $b = -2,\underline{131}\cdots$.

6/ ليكن n عددا طبيعيا. أثبت أن العدد الطبيعي:

ا/ $k = 7^{n+1} - 7^n$ يقبل القسمة على 3.

ب/ $p = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n$ يقبل القسمة على 7.

7/ ليكن a عدد حقيقي موجب تماما.

ا/ بيّن أن: $\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$

ب/ استنتج قيمة المجموع:

$$S = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

التمرين الثاني:

نعتبر: $A = 2026$ ، $B = 1890$ و $C = 1260$.

1/ تحقق أن العدد 1013 أولي، ثم استنتج تحليلا للعدد A .

2/ حلّل العددين B و C إلى جداء عوامل أولية ، ثم استنتج تحليلا للعددين: B^3 و $B \times C^2$.

3/ أُحسب $PGCD\,(B;C)$ و $PPCM\,(B;C)$.

- تحقق أن:

$$B \times C = PGCD\,(B;C) \times PPCM\,(B;C)$$

4/ أكتب كلا من العددين: $\frac{B}{C}$ و $\frac{3}{C} - \frac{2}{B}$ على شكل كسر غير قابل للإختزال.

5/ عين أصغر عدد طبيعي n غير معدوم بحيث يكون العدد $1260 \times n$ مربعا تامّا.

التمرين الثالث:

الهدف من التمرين إثبات أن العدد $\sqrt{2}$ عدد غير ناطق.

1/ نفرض أن $\sqrt{2}$ عدد ناطق أي: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ بحيث a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما، و$b \neq 0$.

ا/ بيّن أن العدد a^2 زوجي ثم استنتج أن a زوجي.

ب/ تحقق أن العدد b^2 زوجي ثم استنتج أن b زوجي.

ج/ برّر لماذا هذين النتيجتين تتناقض مع الفرضية السابقة.

2/ استنتج أن العدد $\sqrt{2}$ عدد غير ناطق.

نسمي هذا النمط من أنماط البرهان: "البرهان بالخُلف" .

التمرين الأول: (التحكم في الحساب)

1/ حساب العدد A^2 :

$$A^2=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2+\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2-2\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)$$

$$=4-\sqrt{7}+4+\sqrt{7}-2\sqrt{\left(4-\sqrt{7}\right)\left(4+\sqrt{7}\right)}$$

$$=8-2\sqrt{(4)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=8-2\sqrt{16-7}=8-2\sqrt{9}=8-2\times 3$$

$$\boxed{A^2=2}$$

- **استنتاج شكل مبسط لـ A :**

لدينا: $4-\sqrt{7}<4+\sqrt{7}$ ومنه: $\sqrt{4-\sqrt{7}}<\sqrt{4+\sqrt{7}}$ وبالتالي:

$\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}<0$ إذن العدد A عدد سالب، وبالتالي: $\sqrt{A^2}=-A$

إذن: $\boxed{A=-\sqrt{A^2}=-\sqrt{2}}$

- العدد A عدد حقيقي (عدد أصم).

2/ كتابة الأعداد على أبسط شكل ممكن وتعيين طبيعتها:

- $B=\dfrac{(-12)^8\times 75^4\times(-4)^{-9}\times(-1)^{2026}}{\left(25^{-2}\right)^{-4}\times 18^6\times 10\times(-1)^{2025}}$

$$=-\frac{12^8\times 75^4\times 1}{(-4)^9\times 25^{(-2)\times(-4)}\times 18^6\times 10\times 1}=+\frac{12^8\times 75^4}{4^9\times 25^8\times 18^6\times 10}$$

$$=\frac{\left(2^2\times 3\right)^8\times\left(5^2\times 3\right)^4}{\left(2^2\right)^9\times\left(5^2\right)^8\times\left(2\times 3^2\right)^6\times(5\times 2)}=\frac{\left(2^2\right)^8\times 3^8\times\left(5^2\right)^4\times 3^4}{2^{2\times 9}\times 5^{2\times 8}\times 2^6\times 3^{2\times 6}\times 5\times 2}$$

$$=\frac{2^{2\times 8}\times 3^{8+4}\times 5^{2\times 4}}{2^{6+1+2\times 9}\times 3^{2\times 6}\times 5^{16+1}}=\frac{2^{16}\times 3^{12}\times 5^8}{2^{25}\times 3^{12}\times 5^{17}}=2^{16-25}\times 5^{8-17}$$

$$=2^{-9}\times 5^{-9}=(2\times 5)^{-9}=\boxed{B=10^{-9}=\frac{1}{10^9}}\quad\in\mathbb{D}\quad\text{(عدد عشري)}$$

- $C=\sqrt{\dfrac{605}{70}}\times\sqrt{\dfrac{14}{(-7)^2}}=\sqrt{\dfrac{605}{70}\times\dfrac{14}{7^2}}=\sqrt{\dfrac{5\times 11^2\times 2\times 7}{2\times 5\times 7\times 7^2}}$

$$=\sqrt{\frac{11^2}{7^2}}=\sqrt{\left(\frac{11}{7}\right)^2}=\boxed{\frac{11}{7}=C}\quad\in\mathbb{Q}\quad\text{(عدد ناطق)}$$

- $D=\sqrt{\dfrac{27^{10}+9^{10}}{27^4+9^{11}}}=\sqrt{\dfrac{\left(3^3\right)^{10}+\left(3^2\right)^{10}}{\left(3^3\right)^4+\left(3^2\right)^{11}}}=\sqrt{\dfrac{3^{3\times 10}+3^{2\times 10}}{3^{3\times 4}+3^{2\times 11}}}=\sqrt{\dfrac{3^{30}+3^{20}}{3^{12}+3^{22}}}$

$$=\sqrt{\frac{3^{20+10}+3^{20}}{3^{12}+3^{12+10}}}=\sqrt{\frac{3^{20}\times 3^{10}+3^{20}}{3^{12}+3^{12}\times 3^{10}}}=\sqrt{\frac{3^{20}\left(3^{10}+1\right)}{3^{12}\left(1+3^{10}\right)}}=\sqrt{\frac{3^{20}}{3^{12}}}$$

$$=\sqrt{3^{20-12}}=\sqrt{3^8}=\sqrt{3^{4\times 2}}=\sqrt{\left(3^4\right)^2}=3^4=\boxed{81=D}\quad\in\mathbb{N}\quad\text{(عدد طبيعي)}$$

- $E=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}}=1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1\times\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\times\left(1-\sqrt{2}\right)}}$

$$=1+\frac{1}{2+\dfrac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2}}=1+\frac{1}{2+\dfrac{1-\sqrt{2}}{1-2}}=1+\frac{1}{2+\dfrac{1-\sqrt{2}}{-1}}$$

$$=1+\frac{1}{2-\left(1-\sqrt{2}\right)}=1+\frac{1}{2-1+\sqrt{2}}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}$$

$$=1+\frac{1\times\left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\times\left(1-\sqrt{2}\right)}=1+\frac{1-\sqrt{2}}{1^2-\sqrt{2}^2}=1+\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}$$

$$=1+\frac{1-\sqrt{2}}{-1}=1-\left(1-\sqrt{2}\right)=1-1+\sqrt{2}=\boxed{\sqrt{2}=E}\quad\in\mathbb{R}\quad\text{(عدد حقيقي)}$$

- $F=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{6}}{2-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{6}{3}-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\dfrac{2-1}{3}}{\dfrac{6-1}{3}}=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{5}{3}}$

$$=\frac{5}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\boxed{\frac{1}{2}=F}\quad\in\mathbb{D}\quad\text{(عدد عشري)}$$

• $G = \left(-\frac{1962}{2025}\right)^{1147} \times \left(\frac{1962}{2025}\right)^{-1447} = -\left(\frac{1962}{2025}\right)^{1447} \times \left(\frac{1962}{2025}\right)^{-1447}$

$= -\left(\frac{1962}{2025}\right)^{1447-1447} = -\left(\frac{1962}{2025}\right)^{0}$

$= \boxed{-1 = G} \in \mathbb{Z}$ **(صحيح نسبي)**

3/ كتابة الأعداد على الشكل العلمي:

• $x = 3^4 = 81 = \boxed{8.1 \times 10^1}$

• $y = 1954 \times 10^{-9} = 1.954 \times 10^3 \times 10^{-9} = \boxed{1.954 \times 10^{-6}}$

• $z = -0.0020156 = \boxed{-2.0156 \times 10^{-3}}$

• **تعيين رتب المقدار:**

- لدينا: $8 \times 10^1 \times 2 \times 10^{-6} = 16 \times 10^{-5} = 1.6 \times 10^{-4}$

إذن رتبة مقدار العدد $x \times y$ هي: $\boxed{2 \times 10^{-4}}$.

- لدينا: $\frac{-2 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-6}} = -1 \times 10^{-3+6} = -1 \times 10^3$

إذن رتبة مقدار العدد $\frac{z}{y}$ هي: $\boxed{-1 \times 10^3}$.

4/ إعطاء المدورات للأعداد:

العدد	المدور للوحدة	المدور إلى 10^{-2}	المدور إلى 10^{-5}
$-\sqrt{2} \approx -1,414213562...$	-1	$-1,41$	$-1,41421$
$\frac{11}{7} \approx 1,571428571...$	2	$1,57$	$1,57143$
$E \times F \approx 0,707106781...$	1	$0,71$	0.70711

5/ كتابة الأعداد على الشكل الكسري:

• العدد $a = 3,1\underline{72}72...$ (الجزء العشري دوري دوره ليس مباشرة بعد الفاصلة)

نضع: $a' = 10a = 31,\underline{72}...$ وباعتبار $x = 0,\underline{72}...$ فإن: $a' = 31 + x$ ... (1)

لدينا عدد أرقام الدور هو $n = 2$ ومنه: $10^2x = 72,\underline{72}...$ أي: $100x = 72 + x$

ومنه: $100x - x = 72$ أي: $99x = 72$ إذن: $x = \frac{72}{99}$

بالتعويض في (1) نجد: $a' = 31 + \frac{72}{99} = \frac{31 \times 99 + 72}{99} = \frac{3141}{99}$

إذن: $a = \frac{a'}{10} = \frac{3141}{99} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{3141}{990} = a}$

• العدد $b = -2,1\underline{31}...$ (الجزء العشري دوري دوره مباشرة بعد الفاصلة)

نضع: $b' = -b = 2,\underline{131}...$ وباعتبار $x = 0,\underline{131}...$ فإن: $b' = 2 + x$ ... (2)

لدينا عدد أرقام الدور هو $n = 3$ ومنه: $10^3x = 131,\underline{131}...$ أي: $1000x = 131 + x$

ومنه: $1000x - x = 131$ أي: $999x = 131$ إذن: $x = \frac{131}{999}$

بالتعويض في (2) نجد: $b' = 2 + \frac{131}{999} = \frac{2 \times 999 + 131}{999} = \frac{2129}{999}$

إذن: $\boxed{b = -\frac{2129}{999}}$

6/ ا/ إثبات أن العدد k يقبل القسمة على 3: لدينا:

• $k = 7^{n+1} - 7^n = 7^n \times 7^1 - 7^n = 7^n(7-1) = 7^n \times 6$

$= \boxed{7^n \times 2 \times 3}$

إذن k يقبل القسمة على 3 (لأنه يكتب من الشكل $3 \times q$ مع q عدد صحيح نسبي).

ب/ إثبات أن العدد p يقبل القسمة على 7: لدينا:

• $p = 2^{n+3} - 2^{n+1} + 2^n = 2^n \times 2^3 - 2^n \times 2^1 + 2^n = 2^n(2^3 - 2 + 1)$

$= 2^n(8 - 2 + 1) = \boxed{2^n \times 7}$

إذن p يقبل القسمة على 7 (لأنه يكتب من الشكل $7 \times q$ مع q عدد صحيح نسبي).

7/ ا/ تبيان أن: $\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$. لدينا:

• $\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} = \frac{1 \times (\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a}) \times (\sqrt{a+1}-\sqrt{a})}$

$= \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+1}^2 - \sqrt{a}^2} = \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{a+1-a} = \frac{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}{1}$

$= \sqrt{a+1} - \sqrt{a}$

ب/ استنتاج قيمة المجموع:

$$S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{1+1}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3+1}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{98+1}}+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{99+1}}$$

$$=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)+\ldots$$

$$+\left(\sqrt{99}-\sqrt{98}\right)+\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)$$

$$=-\sqrt{1}+\sqrt{100}=-1+10=\boxed{9=S}$$ بإختزال الأعداد مع معاكساتها نجد:

التمرين الثاني: (الأعداد الأولية وتطبيقاتها)

1/ لدينا: $\sqrt{1013}\simeq 31.82766\ldots$ وبما أن:

العدد الأولي	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
قابلية القسمة	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا	لا

إذن العدد 1013 عدد أولي.

- **تحليل العدد 2026 :** $\boxed{2026=2\times 1013}$

2/ تحليل العددين $B=1890$ و $C=1260$ إلى جداء عوامل أولية:

1890	2	1260	2
945	3	630	2
315	3	315	3
105	3	105	3
35	5	35	5
7	7	7	7
1		1	

$\boxed{B=1890=2\times 3^3\times 5\times 7}$

$\boxed{C=1260=2^2\times 3^2\times 5\times 7}$

- **استنتاج تحليلا للعددين B^3 و $B\times C^2$:**

- $B^3=\left(2\times 3^3\times 5\times 7\right)^3=2^3\times 3^9\times 5^3\times 7^3$
- $B\times C^2=\left(2\times 3^3\times 5\times 7\right)\times\left(2^2\times 3^2\times 5\times 7\right)^2$

$$=2\times 3^3\times 5\times 7\times 2^4\times 3^4\times 5^2\times 7^2=2^5\times 3^7\times 5^3\times 7^3$$

3/ حساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر:

- $PGCD\,(1890;1260)=2\times 3^2\times 5\times 7=630$
- $PPCM\,(1890;1260)=2^2\times 3^3\times 5\times 7=3780$

- **التحقق:**

الطريقة 1: لدينا:

- $B\times C=1890\times 1260=2381400$

ولدينا:

- $PGCD\,(B;C)\times PPCM\,(B;C)=630\times 3780=2381400$

إذن: $B\times C=PGCD\,(B;C)\times PPCM\,(B;C)$.

الطريقة 2:

لدينا:

- $B\times C=2\times 3^3\times 5\times 7\times 2^2\times 3^2\times 5\times 7=2^3\times 3^5\times 5^2\times 7^2$

ولدينا:

$$PGCD\,(B;C)\times PPCM\,(B;C)=2\times 3^2\times 5\times 7\times 2^2\times 3^3\times 5\times 7$$

$$=2^3\times 3^5\times 5^2\times 7^2$$

إذن: $B\times C=PGCD\,(B;C)\times PPCM\,(B;C)$.

4/ الكتابة على شكل كسر غير قابل للإختزال:

- $\frac{B}{C}=\frac{1890}{1260}=\frac{1890\div 630}{1260\div 630}=\frac{3}{2}$ (أو $\bullet\ \frac{B}{C}=\frac{2\times 3^3\times 5\times 7}{2^2\times 3^2\times 5\times 7}=\frac{3}{2}$)
- $\frac{3}{C}-\frac{2}{B}=\frac{3\times 3-2\times 2}{PPCM\,(B;C)}=\frac{5}{2^2\times 3^3\times 5\times 7}=\frac{1}{2^2\times 3^3\times 7}=\frac{1}{756}$

5/ تعيين أصغر عدد طبيعي n غير معدوم: بحيث العدد $1260n$ مربع تام،

معناه يُكتب على شكل مربع لعدد طبيعي. لدينا:

- $1260n=2^2\times 3^2\times 5\times 7\times n$

ومنه أصغر عدد طبيعي n غير معدوم يجعل $1260n$ مربعا تاما هو $\boxed{n = 7 \times 5 = 35}$

التمرين الثالث: (البرهان بالخُلف)

الهدف من التمرين أن نثبت بالخُلف أن $\sqrt{2}$ عدد غير ناطق.

البرهان بالخلف هو نمط من أنماط البرهان، يُستعمل لإثبات صحة قضية رياضية من خلال افتراض أن نفي القضية صحيح، إثبات أن هذه الفرضية تؤدي إلى تناقضات بعد سلسلة من الإستنتاجات المنطقية، وبالتالي استنتاج أن الفرضية خاطئة ما يعني أن نفيها هو الصحيح.

1/ لإثبات أن $\sqrt{2}$ عدد غير ناطق، نفرض أن العكس (نفي القضية) صحيح ، أي نفرض أن العدد $\sqrt{2}$ عدد ناطق، وذلك معناه أنه يمكن كتابة $\sqrt{2}$ على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان أوليان فيما بينهما، و $b \neq 0$.

ا/ إثبات أن العدد a^2 زوجي:

لدينا من الفرضية أن: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ومنه بتربيع الطرفين نجد: $2 = \frac{a^2}{b^2}$

ومنه: $a^2 = 2b^2$ إذن العدد a^2 عدد زوجي.

- **الإستنتاج:** بما أن العدد a^2 زوجي فإن العدد a زوجي.

ب/ التحقق أن b^2 عدد زوجي:

لدينا مما سبق العدد a زوجي، معناه يمكن كتابته على الشكل: $a = 2k$

حيث k عدد صحيح نسبي. ومنه: $a^2 = 4k^2$

ومن جهة أخرى لدينا: $a^2 = 2b^2$ ومنه: $4k^2 = 2b^2$ أي: $b^2 = 2k^2$

وذلك معناه أن العدد b^2 عدد زوجي.

- **الإستنتاج:** بما أن العدد b^2 زوجي فإن العدد b زوجي.

ج/ هذين النتيجتين لا تتناسب مع الفرضية السابقة، لأن الوصول إلى كون كلا العددان a و b زوجيين فذلك يعني أن كلاهما يقبل القسمة على 2 وهذا يتناقض حتما مع الفرضية (مع كونهما أوليان فيما بينهما أي لا يوجد قاسم مشترك بينهما).

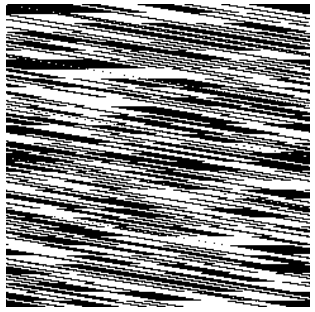
2/ الإستنتاج:

بما أن الفرضية السابقة أدت إلى نتيجة مناقضة لها، نستنتج أن هذه الفرضية خاطئة، إذن نستنتج أن العدد $\sqrt{2}$ عدد غير ناطق. (حسب مبدأ البرهان بالخُلف)

بقول الإمام الشافعي -رحمه الله-:

أَخي لَن تَنالَ العِلمَ إِلّا بِستَّةٍ ♦ ♦ ♦ سَأُنبيكَ عَن تَفصيلِها بِبَيانِ

ذَكاءٌ وَحِرصٌ وَاِجتِهادٌ وَبُلغَةٌ ♦ ♦ ♦ وَصُحبَةُ أُستاذٍ وَطولُ زَمانِ



رابط الموضوع مع الإجابة النموذجية للواجب المنزلي رقم 01 (01- ج م ع تك)