الفرض الثاني للثلاثي الأول في مادة الرياضيات

المستوى:1ج م ع وتك المدة: ساعة

التمرين الأول

1) x و y أعداد حقيقية حيث: $1 \le -2x+7 \le -5$ و $\frac{1}{3} \le \frac{1-y}{3} \le -1$

أ/ بين أنّ: $3 \le x \le 6$ و $0 \le y \le 4$

ب/ أعط حصرا للعدد: $\sqrt{\frac{y^2}{4x-2y}}$

ج/ بيّن أنّ: $0 \le \frac{x}{3}-1 \le 1$ ثم استنتج المقارنة بين $\left(\frac{x}{3}-1\right)$ ، $\left(\frac{x}{3}-1\right)^3$ و $\left(\frac{x}{3}-1\right)^{2025}$

2) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما، نعتبر الأعداد الحقيقية A، B و C التالية:

$$A=\frac{a+b}{2}, \quad B=\sqrt{ab}, \quad C=\frac{2ab}{a+b}$$

أ/ قارن بين العددين A^2 و B^2، ثم استنتج مقارنة بين A و B.

ب/ بين أنّ: $B-C=\frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ ثم استنتج أنّ $B \ge C$ (استعمل المتطابقات الشهيرة).

التمرين الثاني

1) اكتب العبارة الآتية دون رمز القيمة المطلقة حيث:

$$D=|\sqrt{7}-4|+|4-2\sqrt{7}|+\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}$$

2) أكمل الجدول التالي، موضحا طريقة الحساب

صيغة الحصر	صيغة المجال	مركز المجال	نصف قطر المجال	صيغة المسافة	صيغة القيمة المطلقة
$\le x \le 4$.		2			
	$x \in]-1;5[$				
				$d(x,-2) \le 3$	
					$\lvert x+5 \rvert \le 2$

I، J و K ثلاث أجزاء من $\mathbb{R}$ حيث: $K=[-1;3]$ $J=]-5;5]$ $I=]-\infty;-2[\cup[3;+\infty[$

3) عين كل من: $I \cup J$، $I \cap J$، $I \cap K$، $I \cap \mathbb{R}$، $J \cup \mathbb{R}$.

• حل التمرين الأول :

1- نبين أن $3 \leq x \leq 6$ و $0 \leq y \leq 4$

لدينا $1 \geq -2x+7 \geq -5$

أي $6 \geq -2x \geq -12$

أي $\boxed{3 \leq x \leq 6}$

و لدينا $\frac{1}{3} \geq \frac{1-y}{3} \geq -1$

أي $1 \geq 1-y \geq -3$

أي $0 \geq -y \geq -4$

أي $\boxed{0 \leq y \leq 4}$

2- حصر $\sqrt{\frac{y^2}{4x-2y}}$:

① لدينا $4 \geq y \geq 0$ أي $16 \geq y^2 \geq 0$ ②

و لدينا $6 \geq x \geq 3$ أي $24 \geq 4x \geq 12$ ③

و لدينا $4 \geq y \geq 0$ أي $0 \geq -2y \geq -8$

نجمع ② و ③ نجد

$24 \geq 4x-2y \geq 4$

④ أي $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{4x-2y} \geq \frac{1}{24}$

نضرب ① في ④ نجد

$4 \geq \frac{y^2}{4x-2y} \geq 0$

أي $\boxed{0 \leq \sqrt{\frac{y^2}{4x-2y}} \leq 2}$

3- نبين أن $0 \leq \frac{x}{3}-1 \leq 1$

لدينا $3 \leq x \leq 6$

أي $1 \leq \frac{x}{3} \leq 2$

أي $\boxed{0 \leq \frac{x}{3}-1 \leq 1}$

• استنتاج الحصر :

بما أن $0 \leq \frac{x}{3}-1 \leq 1$ (بترتيب تنازلي)

$\left(\frac{x}{3}-1\right) \geq \left(\frac{x}{3}-1\right)^3 \geq \left(\frac{x}{3}-1\right)^{2025}$

② - مقارنة بين A^2 و B^2 :

لدينا $A^2-B^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{a}\times\sqrt{b}^2$

$= \frac{a^2+b^2+2ab}{4} - a\times b$

$= \frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{4}$

$= \frac{a^2+b^2-2ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$

أي $A^2-B^2 \geq 0$ أي $\boxed{A^2 \geq B^2}$

• استنتاج المقارنة بين A و B :

لدينا $A^2 \geq B^2$ وبما أن $A \geq 0$ و $B \geq 0$

فإن $A \geq B$.

ب- نبين أن $B-C = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$

$B-C = \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b}$

$= \frac{\sqrt{ab}\times(a+b)-2ab}{a+b}$

$= \frac{\sqrt{ab}\times(a+b)-2\sqrt{ab}^2}{a+b}$

$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right)$

$= \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\left(\sqrt{a}^2+\sqrt{b}^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}\right)$

$\boxed{B-C = \frac{\sqrt{a+b}}{a+b}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$

- استنتاج أن $B \geq C$:

لدينا : $B - C = \frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

ولدينا $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 0$

ولدينا $a>0$ و $b>0$ إذن $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} > 0$

أي $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 0$

أي $B - C \geq 0$

إذن $\boxed{B \geq C}$

حل المسألة الثانية :

① - كتابة D دون رمز القيمة المطلقة

$$D = |\sqrt{7}-4| + |4-2\sqrt{7}| + \sqrt{(\sqrt{7}-2)^2}$$

$$= |\sqrt{7}-4| + |4-2\sqrt{7}| + |\sqrt{7}-2|$$

$$= -(\sqrt{7}-4) - (4-2\sqrt{7}) + \sqrt{7}-2$$

$$= -\sqrt{7} + 4 - 4 + 2\sqrt{7} + \sqrt{7} - 2$$

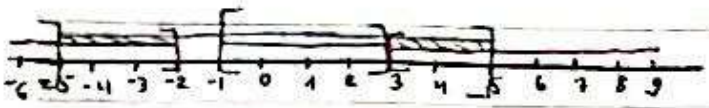
$$\boxed{D = 2\sqrt{7} - 2}$$

② - إكمال الجدول

صيغة الحصر	صيغة المجال	مركز المجال	نصف القطر	صيغة المسافة	صيغة قيمة مطلقة
$0 \leq x \leq 4$	$x \in [0;4]$	2	2	$d(x;2) \leq 2$	$\lvert x-2 \rvert \leq 2$
$-1 < x < 5$	$x \in]-1;5[$	2	3	$d(x;2) < 3$	$\lvert x-2 \rvert < 3$
$-5 \leq x \leq 1$	$x \in [-5;1]$	-2	3	$d(x;-2) \leq 3$	$\lvert x+2 \rvert \leq 3$
$-7 \leq x \leq -3$	$x \in [-7;-3]$	-5	2	$d(x;-5) \leq 2$	$\lvert x+5 \rvert \leq 2$

③ - تعيين تقاطع و اتحاد مجالات :

I بالأحمر و J بالأخضر و K بالأزرق



$I \cup J =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

$I \cap J =]-5;-2] \cup [3;5]$

$I \cap K = \{3\}$

$I \cap \mathbb{R} = I =]-\infty;-2[\cup [3;+\infty[$

$J \cup \mathbb{R} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

النهج التصحيح

الأستاذ :
فراحتية المحفوظ