تذكـــير:

❖ الدالة الخطية:

📖 $x \to ax$ (x صورته ax)، ونكتب كذلك $f(x) = ax$ (تقرأ f لـ x تساوي ax) و $f(x)$ تسمّى صورة x بالدالة الخطية f و x هو العدد الذي صورته $f(x)$، a يسمى معامل الدالة الخطية.

مثال 01: الدالة f التي ترفق كل عدد x بنصفه هي دالة خطية نرمز لها بـ:

$f: x \to \frac{1}{2}x$ أو $f(x) = \frac{1}{2}x$

📖 إذا كانت f دالة خطية معرفة كما يلي: $f(x) = ax$ فإنه يمكننا إيجاد صورة عدد بهذه الدالة (بالتعويض) أو إيجاد عدد علمت صورته بهذه الدالة كذلك (بحل معادلة من الدرجة الأولى).

مثال 02: لتكن الدالة h المعرفة كما يلي: $h(x) = 12x$

1. لتعيين صورة $\frac{1}{2}$ بهذه الدالة نعوض x بـ $\frac{1}{2}$ نجد:

$h\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$ فصورة العدد $\frac{1}{2}$ بالدالة h هي العدد 6.

2. لإيجاد العدد الذي صورته 36 بالدالة h نعوض $h(x)$ بـ 36

أي: $x = \frac{36}{12} = 3$ ومنه: $x = 3$

فالعدد الذي صورته 36 بالدالة h هو العدد 3.

📖 تعيين دالة خطية انطلاقا من عدد غير معدوم وصورته:

لحساب معامل دالة خطية انطلاقا من عدد غير معدوم x_0 وصورته $f(x_0)$ نطبق العلاقة $a = \frac{f(x_0)}{x_0}$

مثال 03: عين الدالة الخطية h حيث: $h(3) = -7$

لدينا $a = \frac{h(3)}{3} = \frac{-7}{3}$ أي معامل الدالة الخطية h هي $-\frac{7}{3}$

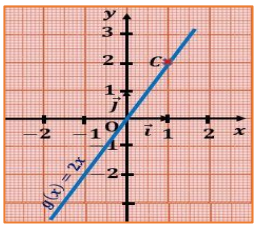
إذن العبارة الجبرية لدالة h هي: $h(x) = -\frac{7}{3}x$

📖 التمثيل البياني للدالة الخطية هو مستقيم يمر بالمبدأ إذن تكفي نقطة واحدة تختلف عن المبدأ لرسمه.

مثال 04: التمثيل البياني للدالة الخطية g هو مستقيم يشمل المبدأ والنقطة $C(1;2)$

هذا يعني أن :

$g(0) = 0$ و $g(1) = 2$



❖ الدالة التآلفية:

📖 $x \to ax + b$ (x صورته $ax + b$)، ونكتب كذلك: $f(x) = ax + b$ (تقرأ f لـ x تساوي $ax + b$) و $f(x)$ تسمّى صورة x بالدالة التآلفية f و x هو العدد الذي صورته $f(x)$، a يسمى معامل الدالة التآلفية.

مثال 01: الدالة f التي ترفق كل عدد x بضعفه مضافاً إليه العدد 3 هي دالة تآلفية نرمز لها بـ: $f: x \to 2x + 3$ أو $f(x) = 2x + 3$

📖 إذا كانت f دالة تآلفية معرفة كما يلي $f(x) = ax + b$ فإنه يمكننا إيجاد صورة عدد بهذه الدالة (بالتعويض) أو إيجاد عدد علمت صورته بهذه الدالة كذلك (بحل معادلة من الدرجة الأولى).

مثال 02: لتكن الدالة h المعرفة كما يلي: $h(x) = 4x + 1$

1. لتعيين صورة 2 بهذه الدالة نعوض x بـ 2 نجد:

$h(2) = 4 \times 2 + 1 = 9$

فصورة العدد 2 بالدالة h هي العدد 9.

2. لإيجاد العدد الذي صورته 5 بالدالة h نعوض $h(x)$ بـ 5

أي: $h(x) = 5$ وعليه: $4x + 1 = 5$ وبالتالي: $4x = 5 - 1$

أي: $4x = 4$ فإن: $x = \frac{4}{4}$ ومنه: $x = 1$

فالعدد الذي صورته 5 بالدالة h هو العدد 1.

📖 تعيين دالة خطية انطلاقا من عددين وصورتيهما:

لحساب معامل دالة تآلفية انطلاقا من عددين مختلفين x_1 و x_2 و صورتيهما $f(x_1)$ و $f(x_2)$ بهذه الدالة نطبق العلاقة:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

لإيجاد b نحل المعادلة: $f(x_1) = ax_1 + b$ أو $f(x_2) = ax_2 + b$

مثال 03: عين الدالة التآلفية h حيث: $h(1) = 3$ و $h(-3) = -5$

$$a = \frac{h(1) - h(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - (-5)}{1 - (-3)} = \frac{3 + 5}{1 + 3} = \frac{8}{4} = 2$$

معامل الدالة التآلفية h هي 2 ومنه $h(x) = 2x + b$

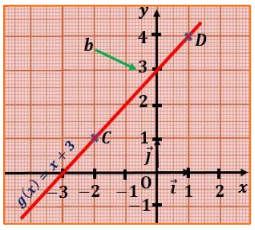
لدينا: $h(1) = 3$ وعليه: $2(1) + b = 3$ أي: $2 + b = 3$

وبالتالي: $b = 3 - 2$ ومنه: $b = 1$

إذن العبارة الجبرية لدالة h هي: $h(x) = 2x + 1$

📖 لتمثيل البياني لدالة تآلفية $f(x) \to ax + b$ هو مجموعة النقاط ذات الإحداثيات $(x; y)$ بحيث $y = ax + b$ يسمى a معامل توجيه المستقيم. يسمى b لترتيب إلى المبدأ.

مثال 04: التمثيل البياني للدالة التآلفية g هو مستقيم يشمل النقطتين $C(-2;1)$ ؛ $D(1;4)$ هذا يعني $g(-2) = 1$ و $g(1) = 4$



ملاحظات:

- الدالة التآلفية ليست وضعية تناسبية (في الحالة $b \neq 0$).
- في حالة $b = 0$ تصبح الدالة التآلفية دالة خطية.
- إذا كان $a = 0$ تسمى الدالة الثابتة.

تمارين – وضعيات

التمرين 01:

1. عين الدالة التآلفية f التي تمثيلها البياني يشمل النقطتين $M(2;5)$ ، $N(-1;-4)$.
2. هل النقطة $H(4;11)$ تنتمي الى هذا التمثيل ؟
3. أوجد العدد الذي صورته 5 بالدالة f .
4. أوجد صورة العدد -2 بالدالة f.

التمرين 02:

1. عين الدالة الخطية g التي تمثيلها البياني يشمل النقطة $E(3;6)$.
2. هل النقطة $K(-1;-2)$ تنتمي الى هذا التمثيل ؟
3. أوجد العدد الذي صورته 4 بالدالة g .
4. أوجد صورة العدد 7 بالدالة g.

التمرين 03: $(BEM\ 2016)$

f دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ يشمل النقطتين $A(2;5)$ و $B(-1;-4)$.

1. بيّن أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية f هي: $f(x) = 3x - 1$.
2. لتكن النقطة $C(4;11)$ من المستوي، هل النقط A ، B ، C على استقامة واحدة.
3. أوجد العدد الذي صورته 29 بالدالة f.

التمرين 04:

لتكن النقاط $M(1;1)$؛ $F(0;3)$؛ $E(3;-3)$

1. أوجد الدالة التآلفية التي تمثيلها البياني هو المستقيم (EF).
2. برهن أن النقاط E، F، M على استقامة واحدة.

التمرين 05:

لتكن f الدالة التآلفية معرفة كما يلي: $f(x) = 2x - 1$.

1. احسب $f(1)$؛ $f(-1)$.
2. هل النقطتان $A(0;-1)$ و $B\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$ تنتميان إلى (Δ) التمثيل البياني لـدالة f؟
3. أنشئ المستقيم (Δ) في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
4. g دالة خطية تمثيلها البياني يشمل النقطة B.
5. مثل بيانيا g في نفس المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
6. انطلاقا من التمثيل البياني للدالة g، أعط العبارة الجبرية للدالة g .

الوضعية الادماجية 01:

تقدم إحدى الشركات المتخصصة في خدمات الانترنت العروض الآتية:

العرض الأول: كل $1\ MO$ بـ $2\ DA$.

العرض الثاني: كل $1\ MO$ بـ $1\ DA$ مع اشتراك شهري بمبلغ غير مسترجع قدره $150\ DA$.

الجزء الأول:

1. أكمل الجدول التالي بحساب المبلغ اللازم حسب كل عرض موضحا مراحل الحساب:

العروض \ السعة	تحميل شريط علمي سعته $100\ MO$	تحميل سور قرآنية سعتها $250\ MO$
العرض 1		
العرض 2		

2. ليكن x سعة الانترنت المستهلكة.
y_1 هو المبلغ حسب العرض الأول و
y_2 هو المبلغ حسب العرض الثاني.
- عبر عن y_1 و y_2 بدلالة x.

الجزء الثاني:

1. في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
مثل بيانيا الدالتين: $f(x)=2x$ و $g(x)=x+150$
(نأخذ: $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $50\ MO$ ، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $50\ DA$).
2. حل جملة المعادلتين التالية:
$$\begin{cases} y=2x \\ y=x+150 \end{cases}$$
- أعط التفسير البياني لهذا لحل.
3. بقراءة بيانية، ماهو العرض المناسب لتحميل شريط أناشيد سعته $200\ MO$.

الجزء الثالث:

خلال شهر رمضان الكريم أعلنت نفس الشركة لزبائنها أنهم بإمكانهم الاستفادة من 20% سعة انترنت إضافية مجانا عند كل شراء.
ما هي سعة الانترنت الواجب شراؤها للحصول على سعة قدرها $4800\ MO$.

الوضعية الادماجية 02: $(BEM\ 2007)$

تقترح شركة لسيارات الأجرة التسعيريين التاليتين:

التسعيرة الأولى: $15\ DA$ للكيلومتر الواحد لغير المنخرطين.

التسعيرة الثانية: $12\ DA$ للكيلومتر الواحد مع مشاركة شهرية قدرها $900\ DA$.

1) انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله:

المسافة (km)	60		
التسعيرة الأولى (DA)			5100
التسعيرة الثانية (DA)		3060	

2) ليكن: x هو عدد الكيلومترات للمسافات المقطوعة.

y_1 هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.
y_2 هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.
أ. عبّر عن y_1 و y_2 بدلالة x.
ب. حل المتراجحة: $15x>12x+900$

3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.
أ. مثل بيانيا الدالتين f و g حيث:
$f(x)=15x$ و $g(x)=12x+900$
($1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $50\ km$، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $500\ DA$).
ب. استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

الوضعية الادماجية 03: $(BEM\ 2011)$

تقترح وكالة تجارية للاتصالات الهاتفية للتسديد الشهري الصيغ الثلاث الآتية:

الصيغة (أ): دفع 11 دينارا للدقيقة .
الصيغة (ب): دفع 600 دينار اشتراكاً و 5 دنانير للدقيقة.
الصيغة (ج): دفع 1200 دينار اشتراكاً و 3 دنانير للدقيقة.

1) احسب تكلفة المكالمات التي مدتها 100 دقيقة في كل من الصيّغ الثلاث.
2) y يمثل الكلفة بالدنانير، x يمثل المدة بالدقائق.
اكتب y بدلالة x في كل من الصيغ الثلاث . و في نفس المعلم، مثّل بيانيا الصيغ الثلاث و استنتج الفترة الزمنية التي تكون خلالها الصيّغة (ب) أقل تكلفة.
(يمكنك اختيار المعلم بحيث $1\ cm$ تمثل 50 دقيقة على محور الفواصل و $1\ cm$ تمثل $200\ DA$ على محور التراتيب).

الوضعية الادماجية04: $(BEM\ 2012)$

يقترح مدير صحيفة يومية على زبائنه صيغتين لاقتناء الجريدة.

الصيّغة الأولى: ثمن الجريدة $10\ DA$.
الصيّغة الثانية: ثمن الجريدة $8\ DA$ مع اشتراك سنوي قدره $500\ DA$.

1) انقل واتمم الجدول :

عدد الجرائد المشتراة	50		
مبلغ الصيّغة الأولى بـ DA		1000	
مبلغ الصيّغة الثانية بـ DA			3300

2) ليكن x عدد الجرائد المشتراة.
نسمي $f(x)$ الثمن المدفوع بالصيّغة الأولى و $g(x)$ الثمن المدفوع بالصيغة الثانية .
- عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x.
3) مثّل بيانيًا الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث:
$2cm$ على محور الفواصل يمثّل 50 جريدة و $2cm$ على محور التراتيب يمثّل $500\ DA$.
4) حل المعادلة $f(x)=g(x)$ وماذا يمثل الحل ؟
5) ماهي الصيغة الأفضل في الحالتين التاليتين:
- عند اقتناء 150 جريدة.
- عند اقتناء 270 جريدة.

الوضعية الادماجية 05: $(BEM\ 2013)$

لإقامة حفل زفاف قررت عائلة كراء سيارة فاخرة فاتصل الأب محمد بثلاث وكالات فقدّموا له عروضا حسب المعطيات المقابلة:

المعطيات:

عرض الوكالة الأولى: دفع مبلغ $4000\ DA$ لليوم الواحد.
عرض الوكالة الثانية: دفع مبلغ $3000\ DA$ لليوم الواحد يضاف إليه ضمان غير مسترجع قدره $1000\ DA$.
عرض الوكالة الثالثة: دفع مبلغ $16000\ DA$ لمدة لا تتعدى أسبوعا واحدا.

فاستنجد الأب محمد بابنه سمير الذي يدرس في السنة الرابعة متوسط لمساعدته في اختيار العرض الأنسب والأقل تكلفة.
لو كنت في مكان سمير ساعد الأب محمد في:

1) اختيار العرض الأنسب والأقل تكلفة لكراء سيارة لمدة 7 أيام .
2) x عدد الأيام التي يستغل فيها الأب محمد السيارة.
أ. عبّر، بدلالة x، عن العرض الأول بالدالة $f(x)$ وعن العرض الثاني بالدالة $g(x)$ وعن العرض الثالث بالدالة $h(x)$.
ب. مثّل بيانيا في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ الدوال f، g و h.
(حيث كل $2\ cm$ من محور الفواصل يمثّل يومًا واحدًا وكل $1\ cm$ من محور التراتيب يمثّل $2000\ DA$).
3) اعتماداً على البيان املأ الجدول الاتي:

الأيام \ العروض	اليوم الأول	اليوم الرابع	اليوم الخامس
العرض 1			
العرض 2			
العرض 3			

4) أ. حلّ المعادلات الآتية لإيجاد x عدد الأيام المستغلة من طرف الأب محمد:
$f(x)=g(x)$؛ $f(x)=h(x)$؛ $g(x)=h(x)$
ب. ماذا يمثل حل كل معادلة؟

الوضعية الادماجية 06: $(BEM\ 2014)$

بمناسبة عيد الأضحى قدمت مؤسسة للهاتف النّقال عرضين لمدّة أسبوع للتّواصل وتبادل التّهاني بواسطة الرّسائل القصيرة (SMS).

العرض الأول: DA 3 للرسالة الواحدة.

العرض الثاني: D 1,5 Aللرسالة الواحدة مع اقتطاع مبلغ جزافي قدره DA 30 من الرّصيد.

1) انقل وأكمل الجدول:

عدد الرسائل (SMS)	10		
المبلغ حسب العرض الأول بـ DA		45	
المبلغ حسب العرض الأول بـ DA			90

2) x يعبّر عدد الرسائل المرسلة.

y_1 هو المبلغ حسب العرض الأول و y_1 هو المبلغ حسب العرض الثاني.

- عبّر عن y_1 و y_2 بدلالة x.

3) f و g دالتان حيث:

$f(x) = 3x$ و $g(x) = 1,5x + 30$

مثل بيانيا الدالتين f و g في نفس المعلم المتعامد و المتجانس حيث:

($1\ cm$ على محور الفواصل يمثّل 5 رسائل SMS و $1\ cm$ على محور التراتيب يمثّل DA 10).

4) يريد الأخوان زينب وكريم استغلال هذين العرضين لهذه المناسبة، في رصيد كريم DA 120 ويريد تهنئة أكبر عدد من الأشخاص، أمّا زينب تريد تهنئة زميلاتها في الدّراسة وعددهن 15.

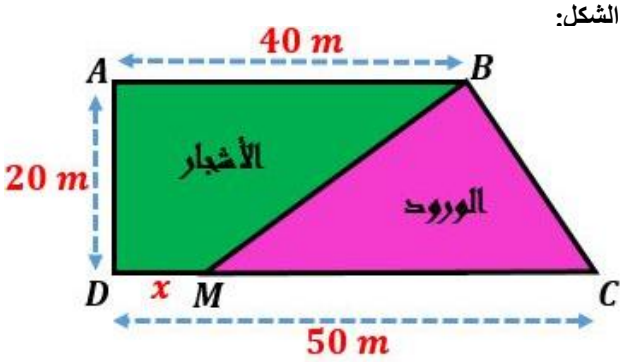
- بقراءة بيانية، ما هو العرض المناسب لكل منهما ؟ (مع الشّرح)

الوضعية الادماجية 07: $(BEM\ 2015)$

I) لعمي أحمد قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها $1000\ m^2$، عرضها خمسي $\left(\frac{2}{5}\right)$ طولها.

- أوجد بُعدي هذه القطعة.

II) تنازل عمي أحمد لأخيه عن جزء من هذه القطعة مساحته $100\ m^2$ و خصص الجزء الباقي منها لاستغلاله مشتلة للورود والأشجار، لهذا الغرض قسّم هذا الجزء عشوائيا إلى قطعتين كما هو موضح في الشكل:



نضع $DM = x$ $(M$ نقطة من $[DC]$ مع $0 \leq x \leq 50)$.

لتكن $f(x)$ مساحة المثلث BCM و $g(x)$ مساحة الرباعي $ABMD$.

1) أ- عبّر عن $f(x)$ و $g(x)$ بدلالة x.

ب- ساعِد عَمّي أحمد لإيجاد الطول DM حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة.

2) أ- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- مثّل بيانيا الدالتين:

$f(x) = 500 - 10x$ و $g(x) = 10x + 400$

نأخذ:

$1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $2\ m$

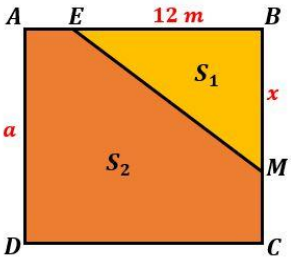
$1\ cm$ على محور التراتيب يمثل $50\ m^2$

ب- فسّر بيانياً مساعدتك السابقة لعمي أحمد، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة.

الوضعية الادماجية 08: $(BEM\ 2017)$

$ABCD$ قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها $324\ m^2$ ملك للأخوين أحمد وفاطمة ومجزأة حسب المخطط المقابل.

الجزء الأول:



1) احسب a طول ضلع هذه القطعة .

2) M نقطة متحركة على الضلع $[DC]$ حيث: $BM = x$

E نقطة من $[BA]$ حيث: $BE = 12\ m$

الجزء EBM تملكه فاطمة والجزء $AEMCD$ يملكه أحمد .

أ. ليكن S_1 مساحة الجزء EBM و S_1 مساحة الجزء $AEMCD$

- اكتب بدلالة x كلا من المساحتين S_1 و S_1.

ب. ساعد الأخوين على تحديد موضع النقطة M بحيث مساحة قطعة أحمد ضعف مساحة قطعة فاطمة.

الجزء الثاني:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

3) مثل بيانيا الدالتين f و g حيث:

$f(x) = 12x$ و $g(x) = -6x + 324$

(نأخذ: $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل $2\ m$ و $1\ cm$ على محور التراتيب يمثّل $36m^2$).

- بقراءة بيانية فسر مساعدتك السابقة للأخوين حول تحديد موضع النقط M مع ايجاد مساحة كل من القطعتين.

الوضعية الادماجية 09: $(BEM\ 2018)$

عبد الله ومحمد عاملان في مؤسسة لصناعة ألعاب الأطفال، راتبهما الشهري على النحو التالي:

عبد الله راتبه: DA 20000 إضافة إلى DA 200 لكل لعبة يتم صنعها.

محمد راتبه: DA 30000 إضافة إلى DA 100 لكل لعبة يتم صنعها.

الجزء الأول:

1) ماهو الراتب الشهري الذي يتقاضاه كل منهما إذا تمّ صنع 120 لعبة؟

2) ليكن x عدد اللعب المصنوعة في مدة شهر.

- عبّر بدلالة x عن y_1 راتب عبد الله وعن y_2 راتب محمد.

الجزء الثاني:

1) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- ارسم المستقيمين (D_1) و (D_2) ممثلا الدالتين g و h حيث:

$g(x) = 200x + 20000$ و $h(x) = 100x + 30000$

(نأخذ: $1\ cm$ على محور الفواصل يمثل 50 لعبة، $1\ cm$ على محور التراتيب يمثل DA 5000).

2) جل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} y = 200x + 20000 \\ y = 100x + 30000 \end{cases}$$

- ثم أعط تفسيرا بيانيا لهذا الحل.

- بقراءة بيانية متى يكون راتب عبد الله أكبر من راتب محمد؟

بالتوفيق والنجاح