

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ  
السَّلَامُ عَلَیْكُمْ وَرَحْمَةُ اللّٰهِ وَبَرَكَاتُهُ

سلاسل التفوق في الرياضيات

الجيل الثاني

السنة الرابعة من التعليم المتوسط

2020/2019

ملخصات دروس مرفقة بتمارين تطبيقية  
ووضعيات بدون حلول.

أسنادة الرياضيات  
جبلاحي حليلة

تذكير:

❖ قواسم عدد طبيعي:

ب و  $a$  عدنان طبيعيين حيث  $b \neq 0$ .✓ القول أن  $b$  قاسم للعدد  $a$ ، معناه أن باقي القسمة الإقليدية لـ  $a$ على  $b$  هو 0.✓ القول أن  $b$  قاسم للعدد  $a$ ، معناه يوجد عدد طبيعي  $q$  حيث $a = b \times q$ .

مثال:

 $20 = 6 \times 120$  ومنه 6 قاسم للعدد 120 وحاصل القسمة  $q = 20$ ولدينا: أيضا  $120 = 20 \times 6$  ومنه 20 قاسم للعدد 120 و  $q = 6$ .

ملاحظات:

1. كل الجمل الآتية لها نفس المعنى:

•  $b$  قاسم لـ  $a$ .•  $a$  يقبل القسمة على  $b$ .•  $a$  مضاعف لـ  $b$ .2. 1 قاسم لكل عدد طبيعي  $a$  لأن  $a = 1 \times a$ .

3. كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه ونكتب:

 $a = a \times 1$ 

❖ خواص قواسم عدد طبيعي:

خاصية 01:

 $a, b, n$  أعداد طبيعية غير معدومة.• إذا كان  $n$  يقسم كلا من  $a$  و  $b$ ، فإن  $n$  يقسم  $a + b$  و  $a - b$ . $(a \geq b)$ .• إذا كان  $n$  يقسم  $a$ ، فإن  $n$  يقسم  $k \times a$  حيث  $k$  عدد طبيعي.

خاصية 02:

 $a, b, n$  أعداد طبيعية غير معدومة حيث  $a > b$ .إذا كان  $n$  يقسم كلا من  $a$  و  $b$ ، فإن  $n$  يقسم باقي القسمة الإقليدية لـ  $a$ على  $b$ .

❖ تعيين قواسم عدد طبيعي:

للبحث عن قواسم عدد طبيعي  $a$ .نجري القسمة الإقليدية للعدد  $a$  على الأعداد الطبيعية التي مربع كل منهاأصغر من  $a$  أو يساويه، وفي حالات الباقي المعدوم، فإن كلا من المقسومعليه والنتائج هما قاسمان للعدد  $a$ .

في حالة الأعداد 2، 3، 4، 5، 9 نطبق قواعد قابلية القسمة.

مثال: عيّن كل قواسم العدد 124.

لدينا: 124 محصور بين  $11^2$  و  $12^2$  ومنه نختبر قابلية قسمة 124

على الأعداد من 1 إلى 11. نجد 124 يقبل القسمة على كل من الأعداد

1، 2، 4. ومن المساويات:  $124 = 1 \times 124$ ،  $124 = 2 \times 62$ ،  $124 = 4 \times 31$ . $124 = 4 \times 31$ .

نجد أن 124 يقبل القسمة على 31، 62، 124.

ومن قواسم 124 هي: 1، 2، 4، 31، 62، 124.

❖ القواسم المشتركة لعددين طبيعيين:

القواسم المشتركة لعددين طبيعيين  $a$  و  $b$  هي الأعداد الطبيعية غيرالمعدومة التي تقسم  $a$  و  $b$  في آن واحد.

مثال:

6 قاسم مشترك لـ 12 و 18 لأن:  $12 = 2 \times 6$  و  $18 = 3 \times 6$ .

قواسم 12 هي: 1، 2، 3، 4، 6، 12.

قواسم 18 هي: 1، 2، 3، 6، 9، 18.

إذن القواسم المشتركة للعددين 12 و 18 هي 1، 2، 3، 6.

❖ القاسم المشترك الأكبر:

يسمى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين  $a$  و  $b$  القاسم المشتركالأكبر لهذين العددين، ويرمز له بالرمز  $PGCD(a; b)$ .

مثال:

قواسم 12 هي: 1، 2، 3، 4، 6، 12.

قواسم 18 هي: 1، 2، 3، 6، 9، 18.

القواسم المشتركة لـ 12 و 18 هو 1، 2، 3، 6.

القاسم المشترك الأكبر لـ 12 و 18 هو 6.

ونكتب:  $PGCD(12; 18) = 6$ 

❖ طريقة إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

❖ خوارزمية عمليات القسمة المتتالية (خوارزمية اقليدس):

مثال: أوجد  $PGCD(156; 132)$ 

$$156 = 132 \times 1 + 24$$

$$132 = 24 \times 5 + 12$$

$$24 = 12 \times 2 + 0$$

إذن:  $PGCD(156; 132) = 12$ 

❖ خوارزمية الفروق المتتالية:

مثال: أوجد  $PGCD(156; 132)$ 

$$156 - 132 = 24$$

$$132 - 24 = 108$$

$$108 - 24 = 84$$

$$84 - 24 = 60$$

$$60 - 24 = 36$$

$$36 - 24 = 12$$

$$24 - 12 = 12$$

$$12 - 12 = 0$$

إذن:  $PGCD(156; 132) = 12$ 

نتائج مباشرة:

 $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين.

$$PGCD(a; a) = a$$

$$PGCD(a; 0) = a$$

إذا كان  $b$  قاسما للعدد  $a$  فإن  $PGCD(a; b) = b$ 

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; a)$$

ملاحظات:

1.  $(a$  و  $b$  أوليان فيما بينهما) معناه  $(PGCD(a; b) = 1)$ معناه (الكسر  $\frac{a}{b}$  غير قابل للاختزال).2. لاختزال الكسر  $\frac{a}{b}$  الى كسر غير قابل للاختزال يكفي قسمة كلا من $a$  و  $b$  على  $PGCD(a; b)$ .

تمارين - وضعيات

التمرين 01:

أوجد جميع قواسم الأعداد الآتية:

$$48, 75, 2 \times 13, 17 \times 11 \times 3$$

التمرين 02:

1. عين كل قواسم العددين 105 و 75.

2. ماهو أكبر قاسم مشترك لهما؟

3. ماهو أصغر قاسم مشترك لهما؟

التمرين 03:

باستعمال الفوارق المتتالية، جد في كل حالة من الحالات الآتية القاسم

المشترك الأكبر للعددين.

أ.  $a = 928$  و  $b = 580$

ب.  $a = 806$  و  $b = 496$

ج.  $a = 3465$  و  $b = 1575$

التمرين 04:

احسب القاسم المشترك الأكبر لكل من الأعداد التالية باستعمال خوارزمية

أقليدس في كل حالة:

أ.  $a = 725$  و  $b = 348$

ب.  $a = 845$  و  $b = 693$

ج.  $a = 2736$  و  $b = 1216$

التمرين 05:

احسب ذهنيًا القاسم المشترك الأكبر للعددين في كل حالة من الحالات

الآتية:

أ. 60 و 60 ؛ ب. 45 و 0 ؛ ج. 10 و 200.

**التمرين 06:**

عين العدد الطبيعي  $a$  المحصور بين 25 و 40 و الذي يحقق  $PGCD(a; 15) = 5$ .

**التمرين 07:**

عندما نقسم 402 على العدد  $x$  نجد الباقي 12.  
عندما نقسم 488 على العدد  $x$  نجد الباقي 8.  
• اوجد العدد  $x$ ، علماً أنّ  $x > 12$ .

**التمرين 08:**

1. بين أن العددين 63 و 110 أوليان فيما بينهما.  
2. بين أن:  $\frac{441}{770} = \frac{63}{110}$   
3. عين العدد الطبيعي  $n$  حيث:  $\frac{441}{770} = \frac{315}{315+n}$

**التمرين 09:**

$a$  و  $b$  عددان أوليان فيما بينهما.  
• هل العددان  $3a$  و  $6b$  أوليان فيما بينهما؟

**التمرين 10:**

$x$  و  $y$  عددان طبيعيين غير معدومين بحيث:  $240x = 120y$ .  
1. احسب الكسر  $\frac{x}{y}$ .  
2. أعط الناتج على شكل كسر غير قابل للاختزال.

**التمرين 11:**

اكتب كل كسر من الكسور التالية على شكل كسر غير قابل للاختزال.  
 $\frac{136}{104}$  ؛  $\frac{240}{520}$  ؛  $\frac{651}{310}$  ؛  $\frac{333}{666}$  ؛  $\frac{1978}{732}$

**التمرين 12:**

احسب وأعط النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.  
 $A = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4}\right) \times \frac{7}{6}$  ؛  $B = \frac{2}{3} - \frac{11}{3} \div \frac{7}{12}$   
 $C = \frac{5}{2} \times \frac{7}{3} + \frac{2}{3} \div 5$  ؛  $D = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$

**التمرين 13:**

إليك العدد  $E$  حيث  $E = \frac{2175}{1044} + \frac{17}{12}$   
1. هل العددان 2175 و 1044 أوليان فيما بينهما؟ علّل.  
2. اكتب الكسر  $\frac{2175}{1044}$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.  
3. استنتج كتابة للعدد  $E$  على شكل  $a + \frac{b}{c}$  حيث  $a$ ،  $b$  و  $c$  أعداد طبيعية مع  $a$  أكبر ما يمكن و  $b$  أصغر ما يمكن.

**التمرين 14:**

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1631 و 932.  
2. اكتب الكسر  $\frac{1631}{932}$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.  
3. احسب العدد  $A$  حيث:  $A = \frac{1631}{932} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}$

**التمرين 15:**

إليك الأعداد  $A$  و  $B$  حيث:  
 $A = \frac{133}{27}$  ؛  $B = \frac{90 \times (10^3)^2 \times 12 \times 10^{-4}}{5 \times 10^3}$   
1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 133 و 27. ماذا تستنتج بالنسبة للكسر  $A$ .  
2. أعط الكتابة العلمية للعدد  $B$ .

**التمرين 16:**

1. اكتب الكسر  $\frac{210}{301}$  على شكل كسر غير قابل للاختزال.  
2. احسب الفرق  $\frac{210}{301} - \frac{17}{86}$  ثم اكتب النتيجة على شكل كسر غير قابل للاختزال.

**الوضعية 01:**

اشترى عمي سعيد 1392 كراساً و 812 كتاباً من أجل توزيعها على أكبر عدد ممكن من التلاميذ المحتاجين بحيث كل تلميذ يحصل على كراريس وكتب في أن واحد ويجب أن تكون القسمة عادلة.  
1. على كم تلميذ يمكن توزيع كل الكراريس وكل الكتب؟  
2. كم كراس وكم كتاب يحصل عليه كل تلميذ؟

**الوضعية 02:**

يريد المسؤولون عن الحماية المدنية وضع 240 عون حماية و 105 ضابطاً للحماية المدنية في مجموعات متماثلة و بأبزر عدد ممكن من الأفراد.



1. احسب عدد المجموعات التي تم تشكيلها.
2. احسب عدد أعران الحماية وعدد الضباط في كل مجموعة.

**الوضعية 03:**

عمي محمد الفلاح، يملك حقل نخيل مستطيلة الشكل طوله  $135 m$  و عرضه  $39 m$  يريد تسييجه. لهذا الغرض يفرس أعمدة متساوية المسافة عن بعضها البعض، حيث تكون هذه المسافة عدد طبيعي وأبزر من  $2 m$ ، بالإضافة إلى ذلك يضع عمود في كل ركن من أركان الحقل.  
1. ماهي المسافة الفاصلة بين كل عمودين؟  
2. ماهو عدد الأعمدة؟

**الوضعية 04:**

نريد ملء دنين بالماء وذلك باستعمال دَن سعة  $xL$  حيث  $x$  عدد طبيعي. نعلم أن سعة الدن ① هي  $24 L$  وسعة الدن ② هي  $18 L$ .



1. ماهي أكبر قيمة للعدد  $x$ ؟ (نفرغ هذا الدن كلياً في كل مرة).
2. كم مرة استعملنا هذا الدن لملء الدن ①؟ لملء الدن ②؟

**الوضعية 05:**

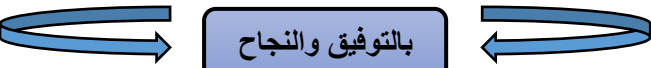
قطعة أرض مستطيلة الشكل بعدها  $165 m$ ،  $88 m$  نريد أن نقيم عليها بيوتاً بلاستيكية ذات قواعد مربعة الشكل لها نفس البعد  $d$ .



1. أوجد قيمة  $d$  حتى يكون عدد البيوت البلاستيكية أقل ما يمكن.
2. ماهو عندئذ عدد البيوت البلاستيكية؟

**الوضعية 06: (BEM 2010)**

1. احسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 140 و 220.
2. صفحة زجاجية مستطيلة الشكل بعدها  $1,40 m$  و  $2,20 m$  جزئت إلى مربعات متساوية بأبزر ضلع دون ضياع.  
أ. ماهو طول ضلع كل مربع؟  
ب. ماهو عدد المربعات الناتجة؟



## ملخص بعض المعارف

## القيم المقربة:

$$\diamond \text{ لدينا: } A = \frac{41}{13} \approx 3,153846 \dots$$

3 هو القيمة المقربة بالنقصان إلى الوحدة للعدد  $A$ .

3,1 هو القيمة المقربة بالنقصان إلى 0,1 للعدد  $A$ .

3,15 هو القيمة المقربة بالنقصان إلى 0,01 للعدد  $A$ .

3,153 هو القيمة المقربة بالنقصان إلى 0,001 للعدد  $A$ .

4 هو القيمة المقربة بالزيادة إلى الوحدة للعدد  $A$ .

3,2 هو القيمة المقربة بالزيادة إلى 0,1 للعدد  $A$ .

3,16 هو القيمة المقربة بالزيادة إلى 0,01 للعدد  $A$ .

3,154 هو القيمة المقربة بالزيادة إلى 0,001 للعدد  $A$ .

3 هو المدور إلى الوحدة للعدد  $A$ .

3,2 هو المدور إلى 0,1 للعدد  $A$ .

3,15 هو المدور إلى 0,01 للعدد  $A$ .

3,154 هو المدور إلى 0,001 للعدد  $A$ .

**تدوير عدد عشري إلى الوحدة:**

مدور عدد عشري إلى الوحدة هو أقرب عدد طبيعي إليه لإيجاد

مدور عدد إلى الوحدة تنظر إلى رقم أعشار:

إذا كان رقم أعشار 0، 1، 2، 3، 4 نأخذ القيمة المقربة إلى الوحدة بالنقصان.

إذا كان رقم أعشار 5، 6، 7، 8، 9 نأخذ القيمة المقربة إلى الوحدة بالزيادة.

**أمثلة:**

مدور العدد 19,287 إلى الوحدة 19.

مدور العدد 19,843 إلى الوحدة 20.

**ملاحظة:**

إذا لم يشترط في السؤال أن القيمة تأخذ مدور أو مقرب بالنقصان أو بزيادة فنأخذ التقريب كالتالي:

- في حساب الاطوال نأخذ بعد الفاصلة رقم واحد فقط.
- في حساب  $\sin \alpha$  أو  $\cos \alpha$  من الاحسن أخذ بعد الفاصلة ثلاث أرقام فقط.
- في حساب الزوايا من الاحسن نأخذ المدور إلى الوحدة من الدرجة.

**الأولية في الحساب:**

**الأولية في الحساب:**

في سلسلة عمليات تجري:

- ✓ العمليات داخل الأقواس والداخلية أولاً.
- ✓ العمليات على القوى.
- ✓ الضرب والقسمة قبل الجمع و الطرح.

مثال:

$$M = 26 - (3 - 1)^3 \times 3$$

$$M = 26 - 2^3 \times 3$$

$$M = 26 - 8 \times 3$$

$$M = 26 - 24$$

$$M = 2$$

## العمليات على الكسور:

**جمع وطرح كسرين:**

لجمع (أو طرح) كسرين لهما نفس المقام نجمع (أو نطرح) البسطين ونحتفظ بالمقام المشترك.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} ; \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b} \quad (b \neq 0)$$

مثال 01:

$$\frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{5+8}{12} = \frac{13}{12}$$

مثال 02:

$$\frac{5}{17} - \frac{9}{17} = \frac{5-9}{17} = -\frac{4}{17}$$

لجمع (أو طرح) كسرين مقام أحدهما مضاعف لمقام الآخر نكتب الكسرين بنفس المقام (توحيد المقامات).

ثم نجمع (أو نطرح) البسطين ونحتفظ بالمقام المشترك.

مثال 01:

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{12} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} + \frac{7}{12} = \frac{4}{12} + \frac{7}{12} = \frac{4+7}{12} = \frac{11}{12}$$

مثال 02:

$$\frac{1}{2} - \frac{9}{16} = \frac{1 \times 8}{2 \times 8} - \frac{9}{16} = \frac{8}{16} - \frac{9}{16} = \frac{8-9}{16} = -\frac{1}{16}$$

**ضرب كسرين:**

لضرب عددين مكتوبين على شكل كسر، نضرب البسطين فيما بينهما و نضرب المقامين فيما بينهما.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad (b \neq 0) \text{ و } (d \neq 0)$$

مثال 01:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$$

مثال 02:

$$3 \times \frac{4}{5} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

**قسمة كسرين:**

مثال 01:

$$\frac{2}{3} \div \frac{5}{13} = \frac{2}{3} \times \frac{13}{5} = \frac{2 \times 13}{3 \times 5} = \frac{26}{15}$$

مثال 02:

$$\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

**القوى ذات أسس صحيحة نسبية:**

**قواعد الحساب على قوى عدد نسبي:**

$a$  و  $b$  عدنان نسبيين غير معدومين؛  $n$  و  $m$  عدنان صحيحان.

$$(a^n)^m = a^{n \times m} ; \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} ; a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} ; (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

أمثلة:

$$10^3 \times 10^4 = 10^{3+4} = 10^7 ; \frac{10^7}{10^5} = 10^{7-5} = 10^2$$

$$(10^2)^3 = 10^{2 \times 3} = 10^6 ; \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$$

$$(5 \times 3)^2 = 5^2 \times 3^2 = 25 \times 9 = 225$$

جدول الأوزان:

t	q	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg

أمثلة:

$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$  ؛  $1 \text{ q} = 100 \text{ kg}$   
 $1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg}$  ؛  $1 \text{ kg} = 0,01 \text{ q}$

تحويل بين وحدات الزمن:

$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$   
 $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$   
 $1 \text{ jour} = 24 \text{ h} = 1440 \text{ min} = 86400 \text{ s}$

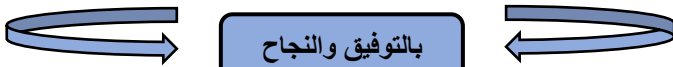
أمثلة:



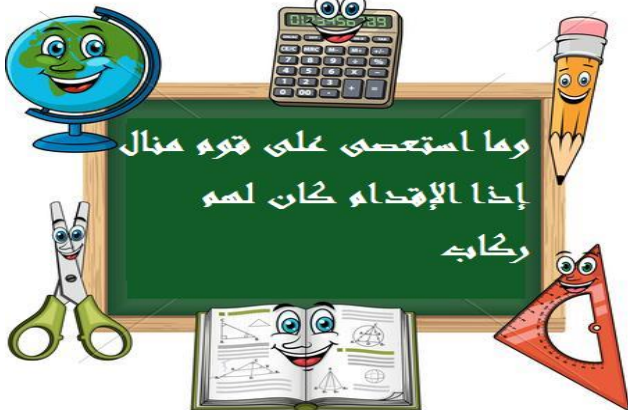
مربعات الأعداد حتى العدد 30:

العدد	مربعه
16	256
17	289
18	324
19	361
20	400
21	441
22	484
23	529
24	576
25	625
26	676
27	729
28	784
29	841
30	900

العدد	مربعه
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225



بالتوفيق والنجاح



الكتابة العلمية لعدد:

الكتابة العلمية لعدد:

كتابة عدد عشري كتابة علمية تعني كتابته على شكل  $a \times 10^n$  حيث  $n$  عدد صحيح نسبي و  $a$  عدد عشري مكتوب برقم واحد (غير معدوم) قبل الفاصلة.



$4800 = 4.8 \times 10^3$   
 $12,05 = 1,205 \times 10^1$   
 $0,067 = 6.7 \times 10^{-2}$

جداول وحدات القياس:

جدول الأطوال:

km	hm	dam	m	dm	cm	mm

أمثلة:

$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$  ؛  $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$   
 $1 \text{ m} = 0,001 \text{ km}$  ؛  $1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}$

جدول المساحات:

	ha	a	ca			
km <sup>2</sup>	hm <sup>2</sup>	dam <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	dm <sup>2</sup>	cm <sup>2</sup>	mm <sup>2</sup>

أمثلة:

$1 \text{ km}^2 = 1000000 \text{ m}^2$  ؛  $1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$   
 $1 \text{ m}^2 = 0,000001 \text{ km}^2$  ؛  $1 \text{ m}^2 = 0,01 \text{ a}$

جدول الحجم:

km <sup>3</sup>	hm <sup>3</sup>	dam <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	dm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>	mm <sup>3</sup>

أمثلة:

$1 \text{ km}^3 = 1000000000 \text{ m}^3$  ؛  $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$   
 $1 \text{ m}^3 = 0,00000001 \text{ km}^3$  ؛  $1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$

جدول السعات:

hl	dal	l	dl	cl	ml

أمثلة:

$1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$  ؛  $1 \text{ l} = 100 \text{ cl}$   
 $1 \text{ ml} = 0,001 \text{ l}$  ؛  $1 \text{ cl} = 0,01 \text{ l}$

جدول الحجم والسعات:

hm <sup>3</sup>	dam <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	dm <sup>3</sup>	cm <sup>3</sup>				
			hl	dal	l	dl	cl	ml

أمثلة:

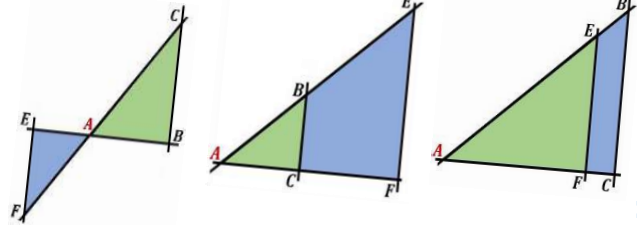
$1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3$  ؛  $1 \text{ l} = 1000 \text{ cm}^3$   
 $1 \text{ cm}^3 = 0,000001 \text{ m}^3$  ؛  $1 \text{ cm}^3 = 0,001 \text{ l}$

تذكير:

خاصية طالس:

(BE) و (CF) مستقيمان متقاطعان في النقطة A. إذا كان (BC) و (EF) متوازيين، فإن:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF} \quad \text{أو} \quad \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$



نتائج:

الجدول الآتي هو جدول تناسبية:

أطوال أضلاع المثلث AEF	AE	AF	EF
أطوال أضلاع المثلث ABC	AB	AC	BC

والمثلث AEF هو تكبير أو تصغير للمثلث ABC.

ملاحظة 01: (BE) و (CF) مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

يكفي عدم تساوي نسبتين من النسب  $\frac{AE}{AB}$ ،  $\frac{AF}{AC}$  و  $\frac{EF}{BC}$  للقول أن المستقيمين (EF) و (BC) غير متوازيين.

ملاحظة 02: تسمح خاصية طالس بحساب الأطوال والنسب وإثبات عدم توازي مستقيمين.

خاصية طالس وتناسب الأطوال:

ABC و AEF مثلثان في وضعية طالس.

لاستنتاج الأطوال المتناسبة في المثلثين ننظم رؤوسهما كالآتي:

A	B	C
A	E	F

ثم ننشئ جدول التناسبية التالي:

AB	AC	BC
AE	AF	EF

معامل التناسبية هو العدد الموجب تماما k.

ولدينا:  $AE = k \times AB$  و  $AF = k \times AC$  و  $EF = k \times BC$ . في الحالة  $k < 1$  هو معامل التصغير والمثلث AEF تصغير للمثلث ABC.

في الحالة  $k > 1$  هو معامل التكبير والمثلث AEF تكبير للمثلث ABC.

مثال: المثلثان ABC و AB'C' في وضعية طالس.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ومنه: } AC' = \frac{2}{3}AC \quad \text{و} \quad AB' = \frac{2}{3}AB$$

$$\text{و} \quad B'C' = \frac{2}{3}BC$$

لدينا معامل التناسبية هو  $\frac{2}{3}$  إذن المثلث AB'C' هو تصغير للمثلث ABC.

حساب أطوال:

مثال: (وحدة الأطوال هي السنتيمتر)

ABCD معين حيث AB = 3,3

M نقطة من القطعة [AB] حيث MB = 2,2

المستقيم (CM) يقطع المستقيم (DA) في N.

إنجاز شكلا مناسباً ثم حساب AN:

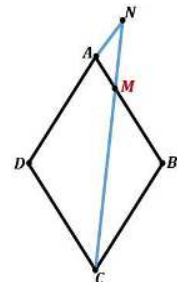
لدينا: (AD) // (BC) (لأن ABCD معين)،

بما أن N تقع على (AD) إذن (AN) // (BC)،

ينتج أن المثلثين MBC و MNA في وضعية طالس،

$$\text{وبالتالي يكون: } \frac{AN}{BC} = \frac{MA}{MB} = \frac{MN}{MC} = \frac{AN}{BC}$$

$$\text{أي: } \frac{AN}{3,3} = \frac{1,1}{2,2} \quad \text{ومنه: } AN = \frac{1,1 \times 3,3}{2,2} = 1,65$$



تقسيم قطعة مستقيمة:

ABC مثلث. D هي نظيرة A بالنسبة إلى C و E نظيرة C بالنسبة إلى D.

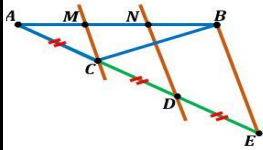
D تقسيم الضلع [AB] إلى 3 قطع متقايسة.

المستقيم الذي يشمل C ويوازي (BE)

يقطع (AB) في M.

المستقيم الذي يشمل D ويوازي (BE)

يقطع (AB) في N.



المثلثان ACM و AEB في وضعية طالس إذن:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{AE} = \frac{1}{3}$

ومنه:  $AM = \frac{AB}{3}$  ... ① المثلثان ADN و AEB في وضعية

طالس إذن:  $\frac{AN}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$  ومنه:  $AN = \frac{2AB}{3}$

لدينا  $NB = AB - AN = AB - \frac{2AB}{3} = \frac{AB}{3}$  ... ②

لدينا C منتصف [AD] و (MC) // (ND) إذن M منتصف [AN]

ومنه  $AM = MN = NB$  ... ③

من ① و ② و ③ نستنتج أن  $AM = MN = NB = \frac{AB}{3}$

وهكذا قسمنا الضلع [AB] إلى 3 قطع متقايسة.

خاصية العكسية لخاصية طالس:

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A.

C و B نقطتان من (d) تختلفان عن A.

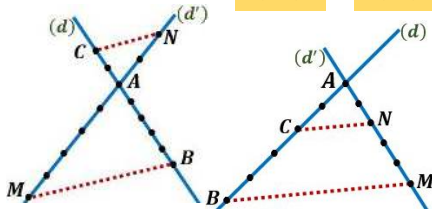
M و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان  $\frac{AC}{AB} = \frac{AN}{AM}$  والنقط  $A, C, B$  و  $A, N, M$  مرتبة بنفس الترتيب،

فإن  $(MB) \parallel (CN)$ .

يمكن ترجمة هذه الخاصية

بإحدى الوضعيتين التاليتين:



إثبات توازي (أو عدم توازي) مستقيمين:

مثال: (وحدة الأطوال هي السنتيمتر)

1. في الشكل المقابل، لدينا:

$$\frac{OA}{OF} = \frac{7,5}{3} = 2,5 \quad \dots \text{ ①}$$

$$\frac{OB}{OE} = \frac{5}{2} = 2,5 \quad \dots \text{ ②}$$

من ① و ② نجد  $\frac{OA}{OF} = \frac{OB}{OE}$  وبما أن النقط A, O, F والنقط E, O, B

طالس فإن (AB) // (EF).

2. النقط A, O, F والنقط A, B, C في استقامة وبنفس الترتيب

لأن  $\frac{AF}{AO} = \frac{10,5}{7,5} = 1,4$  و  $\frac{AC}{AB} = \frac{9}{6} = 1,5$  إذن:  $\frac{AF}{AO} \neq \frac{AC}{AB}$

لو كان المستقيمان (BO) و (CF) متوازيين لكان  $\frac{AF}{AO} = \frac{AC}{AB}$  حسب

خاصية طالس، لكن المساواة خاطئة، إذن المستقيمان (BO) و (CF)

غير متوازيين.

إنشاء النقطة التي تقسم قطعة مستقيم إلى نسبة معلومة:

مثال: [AB] قطعة مستقيم.

إنشاء نقطة E من القطعة [AB] حيث:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{4}{3}$$

(استعمال مسطرة غير مدرجة و مدور)

نرسم مستقيمين (d<sub>1</sub>) و (d<sub>2</sub>) متوازيين ويشملان النقطتين A و B على

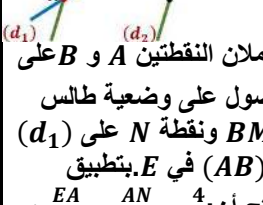
الترتيب ومدرجين بانتظام وبنفس الوحدة. للحصول على وضعية طالس

يكفي تعيين نقطة M على (d<sub>2</sub>) بحيث BM = 3 ونقطة N على (d<sub>1</sub>)

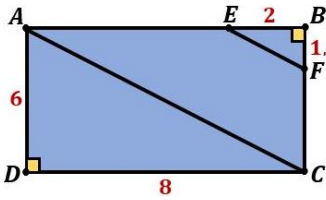
بحيث AG = AN = 4. لدينا (MN) يقطع (AB) في E. بتطبيق

خاصية طالس في المثلثين AEN و EBM ينتج أن:  $\frac{EA}{EB} = \frac{AN}{BM} = \frac{4}{3}$  و

بالتالي E هي النقطة من [AB] تقسم [AB] في النسبة  $\frac{4}{3}$ .



التمرين 06: (BEM 2018) (وحدة الطول هي السنتيمتر)



1. احسب الطول  $AC$ .  
 2. نقطتان  $F$  و  $E$  من الضلعين  $[AB]$  و  $[BC]$  على الترتيب حيث:  $BE = 2$  و  $BF = 1,5$ .  
 • بين أن:  $(AC)$  يوازي  $(EF)$ .

**الوضعية 01:**

الشكل المقابل يمثل مقص، مهما كانت الفتحة فإن:

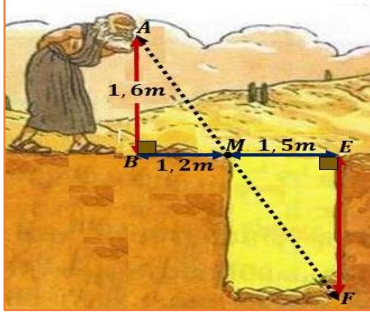


- $(MN) \parallel (BC)$  متوازيان حيث:  
 $AB = AC = 5 \text{ cm}$  ؛  $AM = AN = 6 \text{ cm}$   
 عند استعمال هذا المقص فإن أكبر فتحة بين  $M$  و  $N$  تساوي  $9 \text{ cm}$ .  
 • احسب أكبر فتحة بين  $B$  و  $C$ .

**الوضعية 02:**

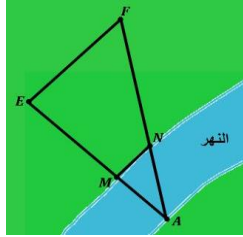
تمعن في الشكل الآتي:

- اوجد عمق الحفرة باستعمال المعطيات الموضحة في الشكل:



**الوضعية 03:**

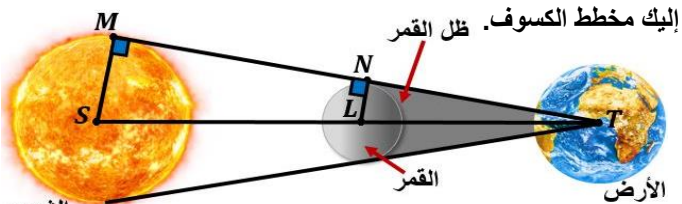
أراد أحمد تقدير عرض نهر، لهذا رسم مستقيمين متوازيين  $(MN)$  و  $(EF)$ .



- عن طريق البصر جعل على استقامية النقط  $A, M, N$  و  $E, M, A$  من ناحية و النقط  $F, N, A$  من الجانب الاخر. قام أحمد بقياس الأطوال  $EM, EF, MN$  فوجد:  $MN = 2 \text{ m}$ ،  
 $EM = 6 \text{ cm}$  ؛  $EF = 5 \text{ cm}$ .  
 • احسب  $AM$ .

**الوضعية 04:**

الكسوف هو ظاهرة تحدث فيها الشمس بمرور القمر بين الأرض و الشمس، وهي ظاهرة تحدث 6 أشهر، إلا أنها تلاحظ في أماكن معينة من الكرة الأرضية. في 03 أكتوبر 2005 حدث كسوف حلقي بالجزائر.



- إليك مخطط الكسوف. ظل القمر  
 الأرض  
 الشمس  
 إذا علمت أن: نصف قطر الشمس هو  $695000 \text{ Km}$  نصف قطر القمر هو  $1736 \text{ Km}$ ، بعد مركز الشمس عن مركز الأرض هو  $150000000 \text{ Km}$ .  
 • ما هو بعد مركز القمر عن مركز الأرض؟

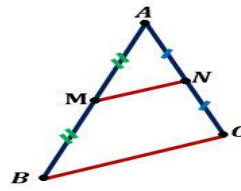
بالتوفيق والنجاح

العلم ليس سوى إعادة

ترتيب الذاكرة

اليومي.

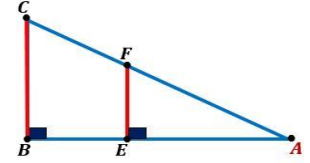
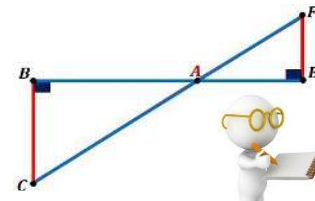
**إثبات أن:  $(MN) \parallel (BC)$**



في المثلث  $ABC$ .  
 $M$  منتصف  $[AB]$  و  $N$  منتصف  $[AC]$ ،  
 إذن حسب خاصية مستقيم المنتصفين فإن:  
 $(MN) \parallel (BC)$ .

**استنتاج أن:  $(EF) \parallel (BC)$**

بما أن:  $(BE) \perp (BC)$  و  $(BE) \perp (EF)$  فإن:  $(EF) \parallel (BC)$ .



**خاصية فيثاغورس:**

**الخاصية:**

إذا كان المثلث  $ABC$  قائم في  $A$ ، فإن مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

**الخاصية العكسية:**

إذا كانت أطوال المثلث  $ABC$  تحقق:  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

فإن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$ .

**ملاحظة:**

المثلث إذا كان أحد اضلاعه قطر للدائرة المحيطة به فهو مثلث قائم.

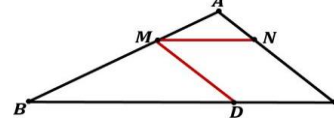
**تمارين - وضعيات**

**التمرين 01:**

الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية (وحدة الطول هي السنتيمتر).

- $BD = 6$  ؛  $AB = 6$  ؛  $AC = 4,5$  ؛  $BC = 9$  ؛  $AN = 1,5$

- و  $(MN) \parallel (BC)$ .  
 1. احسب طول  $AM$ .  
 2. بين أن:  $(MD) \parallel (AC)$ .

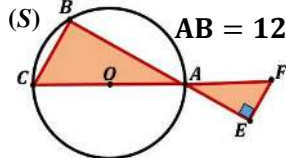


**التمرين 02:**

إليك الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.

- $(S)$  دائرة مركزها  $O$  وقطرها  $[AC]$ .  
 $AB = 12 \text{ cm}$  ؛  $BC = 5 \text{ cm}$  ؛  $AF = 2,6 \text{ cm}$

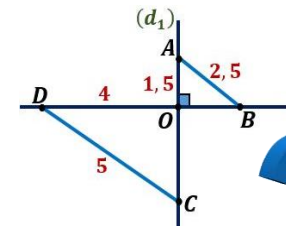
1. بين أن المثلث  $ABC$  قائم في  $B$ .  
 2. استنتج أن:  $(EF) \parallel (BC)$ .  
 3. احسب  $EF$  ؛  $AE$  ؛  $AC$ .  
 4. أي من المثلثين  $ABC$  و  $AEF$  يمثل تكبير للآخر؟ أذكر معامل التكبير.



**التمرين 03:**

لاحظ الشكل المعطى:

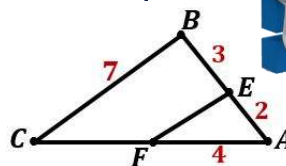
- المستقيمان  $(d_1)$  و  $(d_2)$  متعامدان.  
 • هل  $(AB)$  يوازي  $(DC)$ ؟



**التمرين 04: (BEM 2010)**

في الشكل المقابل  $(EF) \parallel (BC)$ .

- احسب الطولين  $EF$  ؛  $FC$ .



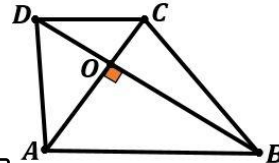
**التمرين 05: (BEM 2015)**

الشكل المقابل مرسوم بأطوال غير حقيقية.

$ABCD$  رباعي قطراه متعامدان ومقاطعان في  $O$  حيث:

- $OB = 18 \text{ cm}$  ؛  $OA = 12 \text{ cm}$

- $OD = 7,5 \text{ cm}$  ؛  $OC = 5 \text{ cm}$



1. برهن أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(CD)$  متوازيان.  
 2. احسب الطول  $AB$ .

تذكير:



## ❖ الجذر التربيعي لعدد موجب:

عدد موجب  $a$ .

الجذر التربيعي للعدد  $a$  هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي  $a$ .  
نرمز للجذر التربيعي للعدد  $a$  بالرمز  $\sqrt{a}$  ونقرأ: «الجذر التربيعي لـ  $a$ ».

**أمثلة:**  $\sqrt{4} = 2$  لأن 4 عدد موجب و  $2^2 = 4$ .

كذلك  $\sqrt{0,04} = 0,2$ ،  $\sqrt{0} = 0$ ،  $\sqrt{1} = 1$ ،  $\sqrt{25} = 5$

**خواص:**  $a$  عدد موجب.

•  $(\sqrt{a})^2 = a$  أي:  $a$  هو العدد الموجب الذي مربعه  $a$ .

•  $\sqrt{a^2} = a$  أي:  $a^2$  هو العدد الموجب الذي مربعه  $a^2$ .

**أمثلة:**  $(\sqrt{2})^2 = 2$ ،  $(\sqrt{2,6})^2 = 2,6$ ،  $(\sqrt{5^2})^2 = 5$ ،  $\sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{3}{7}$

## ❖ الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة:

عدد ناطق موجب.

• في حالة  $a$  مربعاً لعدد ناطق، يكون  $\sqrt{a}$  عدداً ناطقاً.

• في حالة  $a$  ليس مربعاً لعدد ناطق، فإن  $\sqrt{a}$  ليس عدداً ناطقاً.

**أمثلة:**

• نعم أن:  $\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$  إذن  $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$  عدد ناطق، ولدينا  $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

• نعم أنه لا يوجد عدد ناطق مربعه 11. إذن  $\sqrt{11}$  عدد غير ناطق.

❖ المعادلات من الشكل  $x^2 = a$ :

خاصية 01:

عدد موجب  $a$ .

يوجد عدنان متعاكسان هما  $\sqrt{a}$  و  $-\sqrt{a}$  مربع كل منهما يساوي  $a$ .

**ملاحظة:** مربع أي عدد هو دائماً عدد موجب.

**مثال:**

$$\sqrt{3} \times \sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$$

$$(-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^2 = 3$$

العدد  $-\sqrt{3}$  هو معاكس العدد الموجب  $\sqrt{3}$ .

**خاصية 02:**

عدد  $a$  كفي.

• إذا كان  $a > 0$ ، فإن المعادلة  $x^2 = a$  تقبل حلين متعاكسان هما  $\sqrt{a}$

و  $-\sqrt{a}$ .

**مثال 01:** حل المعادلة  $x^2 = 7$ .

$x^2 = 7$  ومنه  $x = \sqrt{7}$  أو  $x = -\sqrt{7}$  إذن المعادلة تقبل حلين

متعاكسان هما  $\sqrt{7}$  و  $-\sqrt{7}$ .

• إذا كان  $a = 0$ ، فإن المعادلة  $x^2 = a$  حلاً واحداً وهو العدد 0.

**مثال 02:** حل المعادلة  $x^2 = 0$ .

$x^2 = 0$  ومنه  $x = 0$  إذن المعادلة تقبل حلاً واحداً وهو العدد 0.

• إذا كان  $a < 0$ ، فإن المعادلة  $x^2 = a$  لا تقبل حلاً حقيقياً لأن

$x^2 \geq 0$ .

**مثال 03:** حل المعادلة  $x^2 = -7$ .

$x^2 = -7$  ومنه المعادلة لا تقبل حلاً حقيقياً لأن  $x^2$  موجب و  $(-7)$

عدد سالب تماماً.

## ❖ العمليات على الجذور التربيعية:

عددان موجبان  $a$  و  $b$ .

$$\sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \quad \text{أمثلة: } \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{5 \times 3} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{أمثلة: } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{30}{15}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{6^2} = 6 \quad \text{مثال: } (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{2^2 \times 3} = 2\sqrt{3} \quad \text{مثال: } \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$$

**ملاحظة:** المساواة غير محققة في كل من الجمع والطرح على الجذور التربيعية، أي:

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{حيث } (a > b)$$

## ❖ توظيف خواص الجذور التربيعية:

**طريقة:** لكتابة الجذر التربيعي لعدد طبيعي  $n$  على الشكل  $a\sqrt{b}$ ، حيث  $a$

و  $b$  عدنان طبيعيين و  $b$  أصغر ما يمكن.

نبحث عن أكبر مربع  $a^2$  يقسم  $n$ ،  $n = a^2 \times b$

لتبسيط العبارة  $x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b}$  نطبق الخاصية التوزيعية:

$$x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b} = (x+y+z)\sqrt{b}$$

**مثال:** كتابة  $E$  على الشكل  $a\sqrt{b}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيين و  $b$  أصغر ما يمكن.

$$E = 5\sqrt{32} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{18} - 2\sqrt{50}$$

$$E = 5\sqrt{16 \times 2} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{9 \times 2} - 2\sqrt{25 \times 2}$$

$$E = 5\sqrt{4^2 \times 2} - 3\sqrt{2} + 7\sqrt{3^2 \times 2} - 2\sqrt{5^2 \times 2}$$

$$E = 5 \times 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 7 \times 3\sqrt{2} - 2 \times 5\sqrt{2}$$

$$E = 20\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 21\sqrt{2} - 10\sqrt{2}$$

$$E = (20 - 3 + 21 - 10)\sqrt{2}$$

$$E = 28\sqrt{2}$$

## ❖ نسبة مقامها عدد غير ناطق:

لجعل مقام النسبة  $\frac{a}{b}$  عدد ناطقاً نضرب كلا من  $a$  و  $b$  في العدد  $\sqrt{b}$

**أمثلة:** كتابة على شكل نسبة مقامها عدد ناطق كلا من  $\frac{7}{2\sqrt{5}}$  و  $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3^2} + \sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{7}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{2\sqrt{5^2}} = \frac{7\sqrt{5}}{2 \times 5} = \frac{7\sqrt{5}}{10}$$

تمارين - وضعيات

**التمرين 01:** اكتب كل عدد من الأعداد التالية كتابة عشرية.

$$\sqrt{0,0001} ; \sqrt{25} ; \sqrt{0,16} ; \sqrt{0,09} ; \sqrt{1,44}$$

**التمرين 02:** اكتب الأعداد التالية على شكل عدد طبيعي.

$$\sqrt{-3(-12)} ; \sqrt{-(-49)} ; \sqrt{(-1)^4} ; \sqrt{0} ; \sqrt{(-5)^2}$$

**التمرين 03:** اكتب كل عدد من الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 10.

$$\sqrt{10^{-100}} ; \sqrt{10^4} ; \sqrt{10^{-4}} ; \sqrt{10^2} ; \sqrt{10^{-2}}$$

**التمرين 04:** عين القيمة المقربة إلى الجزء من 100 بالنقصان والقيمة

المقربة إلى الجزء من 100 بالزيادة لكل عدد مما يلي:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} ; 7 - \sqrt{3} ; \sqrt{1,6} ; 8 + \sqrt{11} ; 4\sqrt{2} - 1$$

**التمرين 05:** حل المعادلات التالية ذات المجهول  $x$ .

$$x^2 = 2 ; x^2 = \frac{1}{4} ; 3x^2 = 12 ; x^2 + 7 = 7 ; x^2 = -5$$

**التمرين 06:**

لتكن العبارة  $M = x(2x - 3) + 3(x + 2) - 24$  وبسطها.

1. انشر العبارة  $M$  وبسطها.

2. عين قيم  $x$  التي تكون من أجلها  $M = 0$ .

**التمرين 07:** احسب ما يلي:

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} ; \sqrt{0,9} \times \sqrt{0,4} ; \sqrt{25 \times 1600} ; \sqrt{0,01 \times 64}$$

### التمرين 19: (BEM 2018)

$A$  و  $B$  عدنان حيث:

$$B = 2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12} \quad \text{و} \quad A = 3\sqrt{8} \times \sqrt{2}$$

- بين أن  $A$  عدد طبيعي.
- اكتب العدد  $B$  على شكل  $a\sqrt{3}$  حيث  $a$  عدد طبيعي.
- بين أن:  $\frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

### التمرين 20: (BEM 2019)

ليكن العدنان الحقيقيان  $A$  و  $B$  حيث:

$$B = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{12} - \sqrt{48} \quad \text{و} \quad A = \frac{9}{7} \times \left(\frac{10}{3} - 1\right)$$

- بين أن  $A$  عدد طبيعي.
- اكتب العدد  $B$  على الشكل  $a\sqrt{3}$  حيث  $a$  عدد طبيعي.
- اكتب  $\frac{A}{B}$  على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

### الوضعية 01:

$a$  و  $b$  عدنان حقيقيان حيث:

$$a = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5}} \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

- اكتب كلا من العددين  $a$  و  $b$  على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.
- احسب مساحة قطعة أرض مستطيلة الشكل التي بعدها  $a$  و  $b$  (وحدة الطول هي الكيلومتر)

### الوضعية 02:

غرفة آلاء على شكل مربع مساحتها  $16 \text{ m}^2$  تريد تزيين حافة أرضية الغرفة بإحاطتها بشريط لاصق مزخرف.

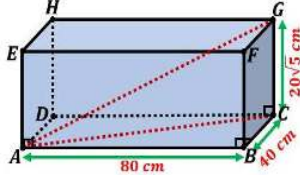


- ساعد آلاء على إيجاد طول الشريط.

### الوضعية 03:

سبّاك لديه أنبوب نحاسي طوله  $95 \text{ cm}$  وصندوق شكله متوازي مستطيلات أبعاده كالتالي:

$$FB = 20\sqrt{5} \text{ cm} \quad ; \quad BC = 40 \text{ cm} \quad ; \quad AB = 80 \text{ cm}$$



- هل يستطيع هذا السبّاك وضع هذا الأنبوب في الصندوق ( اشرح ذلك، علماً أن قطر وسمك الصندوق مهملين )

### الوضعية 04:

أرادت أسيل شراء سجادة مستطيلة الشكل لوضعها على أرضية غرفة الاستقبال. عندما طلبت من البائع بعديها أجاب التاجر بالعبرة التالية:



- مساحتها  $24 \text{ m}^2$  وطولها ضعف عرضها.
- ساعد أسيل على معرفة طول وعرض هذه السجادة. ( تدور النتائج إلى  $\text{cm}$  )

بالتوفيق والنجاح



التمرين 08: اكتب كل عدد مما يلي على الشكل  $a\sqrt{b}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان طبيعيان و  $b$  أصغر ما يمكن.

$$\sqrt{1053} \quad ; \quad \sqrt{125} \quad ; \quad \sqrt{12} \quad ; \quad \sqrt{200} \quad ; \quad \sqrt{252}$$

التمرين 09: اكتب كل عدد مما يلي على الشكل  $\sqrt{n}$  حيث  $n$  عدد طبيعي.

$$3\sqrt{5} \quad ; \quad 0,6\sqrt{100} \quad ; \quad 4\sqrt{0,25} \quad ; \quad 2\sqrt{8} \quad ; \quad 7\sqrt{7}$$

التمرين 10: اكتب كل عدد مما يلي على شكل كسر.

$$\sqrt{\frac{1}{169}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{25}{121}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1600}{22500}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{3600}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{25600}{400}}$$

التمرين 11: بسّط كل عدد مما يلي وأعط النتيجة على شكل كسر.

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{50}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{900}}{\sqrt{400}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{1100}}{\sqrt{1584}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{320}}$$

التمرين 12: اكتب كل عدد مما يلي على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.

$$\frac{1+2\sqrt{6}}{\sqrt{13}} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{7}} \quad ; \quad \frac{8}{\sqrt{11}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \quad ; \quad \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}$$

التمرين 13: عيّن العدد  $n$  في كل حالة مما يلي:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{n} \quad ; \quad \frac{n}{\sqrt{7}} = 4 - \sqrt{7} \quad ; \quad \sqrt{2n} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

التمرين 14:  $A$ ،  $B$  عدنان حقيقيان حيث:

$$A = \sqrt{180} \quad ; \quad B = 2\sqrt{125}$$

- اكتب  $A$  و  $B$  على شكل  $a\sqrt{b}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان موجبان و  $b$  أصغر ما يمكن.
- بين أن  $A \times B$  عدد طبيعي.
- حلّ المعادلة  $x^2 = A \times B$ .



التمرين 15: (BEM 2009) لتكن الأعداد  $A$ ،  $B$ ،  $C$  حيث:

$$A = \sqrt{80} \quad ; \quad B = 2\sqrt{45} \quad ; \quad C = \sqrt{5} + 1$$

- اكتب  $A + B$  على الشكل  $a\sqrt{5}$  حيث  $a$  عدد طبيعي.
- بين أن العدد  $A \times B$  هو عدد طبيعي.
- اكتب  $\frac{C^2}{\sqrt{5}}$  على نسبة مقامها عدد ناطق.

التمرين 16: (BEM 2012) ليكن العدنان الحقيقيان  $m$  و  $n$  حيث:

$$n = (\sqrt{7} + 3)(4 - \sqrt{7}) \quad ; \quad m = \sqrt{112} - 3\sqrt{28} + 3\sqrt{7} - \sqrt{25}$$

- اكتب كلا من العددين  $m$  و  $n$  على الشكل  $a\sqrt{7} + b$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان نسبيين.
- بين أن الجداء  $n \times m$  عدد ناطق.
- اجعل مقام النسبة  $\frac{\sqrt{7}-5}{\sqrt{7}}$  عددا ناطقا.



التمرين 17: (BEM 2014) إليك الأعداد  $A$ ،  $B$ ،  $C$  حيث:

$$A = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{4} \quad ; \quad B = \frac{1,2 \times 10^{-2} \times 7}{12,5 \times 10^3} \quad ;$$

$$C = \sqrt{175} - \sqrt{112} + 6\sqrt{7}$$

- احسب  $A$  ثم اكتبه على الشكل العشري.
- أعط الكتابة العلمية للعدد  $B$ .
- اكتب  $C$  على أبسط شكل ممكن.

التمرين 18: (BEM 2017)  $A$ ،  $B$  عدنان حقيقيان حيث:

$$B = \frac{3}{2\sqrt{3}} \quad ; \quad A = \sqrt{108} - \sqrt{12}$$

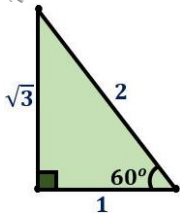
- اكتب العدد  $A$  على الشكل  $a\sqrt{3}$  حيث  $a$  عدد طبيعي.
- اكتب العدد  $B$  على شكل نسبة مقامها عدد ناطق.
- بين أن  $C$  هو عدد طبيعي حيث:  $C = (A + 1)(8B - 1)$ .





**ملاحظة:**  $\sin^2 x \neq \sin x^2$  و  $\sin^2 x = (\sin x)^2$

**مثال:**



$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 60^\circ =$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1} = \sqrt{3}$$

$$(\cos 60^\circ)^2 + (\sin 60^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

**❖ إنشاء هندسي لزواوية حادة علمت القيمة المضبوطة لإحدى نسبها المثلثية:**

**مثال 01:** إنشاء، بدون استعمال منقلة الزاوية التي قيسها  $x$  حيث

$$\cos x = \frac{3}{5}$$

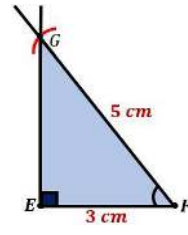
نضع وحدة الطول هي السنتيمتر.

ننشئ زاوية قائمة  $\widehat{GEF}$  رأسها  $E$ .

نعين على أحد ضلعيها النقطة  $F$  حيث  $EF = 3 \text{ cm}$

نرسم الدائرة التي مركزها  $F$  ونصف قطرها  $5 \text{ cm}$

تقطع هذه الدائرة الضلع الثاني في النقطة  $G$ .



في المثلث  $EFG$  القائم في  $E$ ، لدينا:  $\cos \widehat{F} = \frac{EF}{GF} = \frac{3}{5}$ . إذن:  $\widehat{F} = x$ .

عند التحقق بحاسبة نجد  $\widehat{F} \approx 53,1^\circ$ ، وبالممنقلة نجد،  $\widehat{F} = 53^\circ$ .

**مثال 02:** إنشاء، بدون استعمال منقلة الزاوية التي قيسها  $x$  حيث

$$\sin x = \frac{2}{5}$$

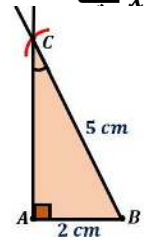
نضع وحدة الطول هي السنتيمتر.

ننشئ زاوية قائمة  $\widehat{CAB}$  رأسها  $A$ .

نعين على أحد ضلعيها النقطة  $B$  حيث  $AB = 2 \text{ cm}$

نرسم الدائرة التي مركزها  $B$  ونصف قطرها  $5 \text{ cm}$

تقطع هذه الدائرة الضلع الثاني في النقطة  $C$ .



في المثلث  $ABC$  القائم في  $A$ ، لدينا:  $\sin \widehat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$ . إذن:  $\widehat{C} = x$ .

عند التحقق بحاسبة نجد  $\widehat{C} \approx 23,6^\circ$ ، وبالممنقلة نجد،  $\widehat{C} = 24^\circ$ .

**مثال 03:** إنشاء، بدون استعمال منقلة الزاوية التي قيسها  $x$  حيث

$$\tan x = \frac{6}{4}$$

نضع وحدة الطول هي السنتيمتر.

ننشئ زاوية قائمة  $\widehat{PMN}$  رأسها  $M$ .

نعين على الضلعين النقطتين  $N$  و  $P$  حيث

$MN = 6 \text{ cm}$  و  $MP = 4 \text{ cm}$  (نستعمل مسطرة مدرجة و مدور)

في المثلث  $MNP$  القائم في  $M$ ، لدينا:  $\tan \widehat{P} = \frac{MN}{MP} = \frac{6}{4}$ . إذن:  $\widehat{P} = x$ .

عند التحقق بحاسبة نجد  $\widehat{P} \approx 56,3^\circ$ ، وبالممنقلة نجد،  $\widehat{P} = 56^\circ$ .

تمارين - وضعيات

**التمرين 01:**

في المثلث  $EFG$  حيث:  $EG = 3,5 \text{ cm}$ ؛  $EF = 3,7 \text{ cm}$ ؛  $FG = 1,2 \text{ cm}$

1. أثبت أن المثلث  $EFG$  قائم.

2. احسب كلا من  $\cos \widehat{FEG}$ ،  $\sin \widehat{FEG}$ ،  $\tan \widehat{FEG}$ .

**التمرين 02:**

في المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  حيث:  $AB = 12 \text{ cm}$ ؛  $BC = 13 \text{ cm}$ .

1. احسب الطول  $AC$ .

2. احسب  $\cos \widehat{B}$ ،  $\sin \widehat{B}$ ،  $\tan \widehat{B}$ ،  $\cos \widehat{C}$ ،  $\sin \widehat{C}$ ،  $\tan \widehat{C}$ .

3. احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاويتان  $\widehat{B}$  و  $\widehat{C}$ .

تذكير:

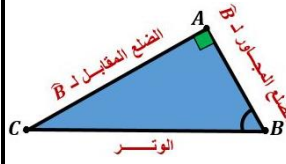
**❖ جيب تمام وجيب وظل زاوية حادة:**

في المثلث  $ABC$  قائم في  $A$ .

$$\cos \widehat{B} = \frac{\text{طول الضلع المجاور لـ } \widehat{B}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\sin \widehat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \widehat{B}}{\text{طول الوتر}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan \widehat{B} = \frac{\text{طول الضلع المقابل لـ } \widehat{B}}{\text{طول الضلع المجاور لـ } \widehat{B}} = \frac{AC}{AB}$$



**ملاحظات:**

1. الوتر هو أكبر ضلع في المثلث القائم.

بالتالي  $\sin \widehat{B}$  و  $\cos \widehat{B}$  هما عدنان محصوران بين 0 و 1.

2. ظل زاوية حادة في مثلث قائم هو عدد موجب.

**مثال:** من الشكل المقابل لدينا:

$$\cos \widehat{C} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\sin \widehat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\tan \widehat{C} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}$$

هي القيمة المضبوطة للعدد  $\frac{2}{\sqrt{13}}$ .

باستعمال حاسبة، نجد أن 0,55 هي القيمة المقربة إلى  $\frac{1}{100}$  للعدد

$\sin \widehat{C}$ .

**ملاحظة:** لحساب طول ضلع في مثلث قائم يمكن استعمال النسبة المثلثية

$\sin$  أو  $\cos$  أو  $\tan$ .

**❖ استعمال الآلة الحاسبة في حساب نسب مثلثية:**

قبل استعمال الآلة الحاسبة، يجب برمجتها بالوحدة الدرجة  $(d^\circ)$ .

**أمثلة:**

1. حساب  $\sin 30^\circ$ :

نضغط بدءاً من اليسار على:

الآلة 01:

الآلة 02:

**نقرأ:**

0.5

2. حساب قيس  $x$  علماً أن  $\sin x = 0,5$ :

نضغط بدءاً من اليسار على:

الآلة 01:

الآلة 02:

**نقرأ:**

30

**❖ العلاقات بين النسب المثلثية في مثلث قائم:**

من أجل كل زاوية حادة في مثلث قائم قيسها  $x$ ، فإن:

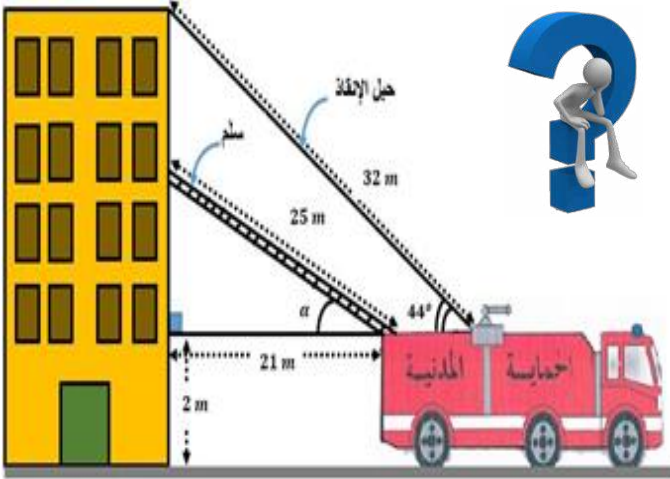
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ و } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1. ساعد أمجد على إيجاد ارتفاع هذا المقام.
2. عيّن قيس الزاوية  $x$  المحددة على الشكل. ( يعطى المدور إلى الدرجة للزاوية  $x$  ).

### الوضعية 02:

الصورة المقابلة عملية إطفاء لحريق وإنقاذ لمواطنين محاصرين فوق العمارة، طول حبل الإنقاذ  $32\text{ m}$  والزاوية التي يصنعها حبل الإنقاذ مع الأفق  $44^\circ$ .

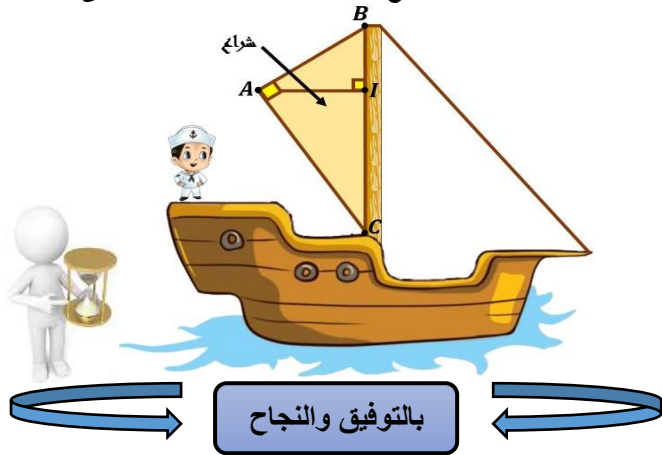
1. احسب ارتفاع العمارة بالتدوير إلى الوحدة، حيث ارتفاع الشاحنة عن الأرض  $2\text{ m}$ .
2. كما مبين لك في الشكل، طول السلم  $25\text{ m}$  و بُعْدُ الشاحنة عن العمارة  $21\text{ m}$ ، أوجد قيس الزاوية  $\alpha$  التي يصنعها السلم مع الأفق (مستوى الأرض) مدوراً إلى الوحدة.



### الوضعية 03:

المخطط المقابل يمثل وجهاً جانبياً لسفينة شراعية صغيرة، نريد دراسة شراع هذه السفينة الذي هو على شكل مثلث  $ABC$  قائم في  $A$  وهو مثبت بعمود  $[CB]$  على سطح السفينة عند النقطة  $C$ ، المستقيمان  $(CB)$  و  $(IA)$  متعامدان، وبحيث  $AB = 1,5\text{ m}$  و  $CA = 2\text{ m}$ .

1. احسب ارتفاع الشراع  $CB$ .
2. علماً أن:  $IC = 1,6\text{ m}$ ، احسب الطول  $IA$ .
3. احسب  $\cos ICA$ ، استنتج قيس الزاوية  $ICA$  بالتدوير إلى الوحدة.



### التمرين 03:

$MNP$  مثلث قائم في  $M$  حيث:  $MN = 4\text{ cm}$ ؛  $NP = 5\text{ cm}$ .

1. احسب  $\tan \widehat{MNP}$ ،  $\sin \widehat{MNP}$ ،  $\cos \widehat{MNP}$ .
2. احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية  $\widehat{MNP}$ .

### التمرين 04:

أنشئ بدون استعمال منقلة، زاوية بحيث جيبها يساوي  $0,8$ . عيّن قيس هذه الزاوية (بالحاسبة و بالمنقلة) تدور النتيجة إلى الدرجة.

### التمرين 05: (BEM 2011)

$ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$ .  $[AH]$  الارتفاع المتعلق بالوتر  $[BC]$ . بين أن:  $AB^2 = BH \times BC$  ( يمكنك الاعتماد على  $\cos \widehat{ABC}$  في كل من المثلثين  $ABC$  و  $ABH$  ).

### التمرين 06: (BEM 2013)

$ABC$  مثلث قائم في  $B$  حيث:  $AB = 4\text{ cm}$  و  $CB = 8\text{ cm}$ . لتكن  $M$  نقطة من  $[BC]$  حيث  $BM = \frac{BC}{4}$ ، المستقيم  $(\Delta)$  العمودي على  $(BC)$  في النقطة  $M$  يقطع  $[AC]$  في النقطة  $H$ .

1. احسب الطول  $MH$ .
2. احسب  $\tan \widehat{AMB}$  و استنتج قيس الزاوية  $\widehat{AMB}$  بالتدوير إلى الدرجة.

### التمرين 07: (BEM 2014)

الشكل  $ABCD$  شبه منحرف قائم في  $B$ ، فيه  $\widehat{ACB} = 25^\circ$ .

1. احسب الطول  $AB$  بالتدوير إلى الوحدة. (استعن بـ:  $\tan \widehat{ACB}$ ).
2. احسب مساحة كل من شبه المنحرف  $ABCD$  و المثلث  $ABC$ . ثم استنتج مساحة الجزء المظلل.

تعطي:  $\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{(\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى}) \times \text{الارتفاع}}{2}$

### التمرين 08: (BEM 2018)

$TIC$  مثلث فيه:  $CI = 13$ ؛  $TI = 5$ ؛  $TC = 12$ .

1. بين أن المثلث  $TIC$  قائم ثم احسب مساحته.
2. لتكن  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $T$  على الضلع  $[CI]$ .
  - احسب الطول  $TH$  بالتدوير إلى  $0,1$ .

### التمرين 09: (BEM 2019)

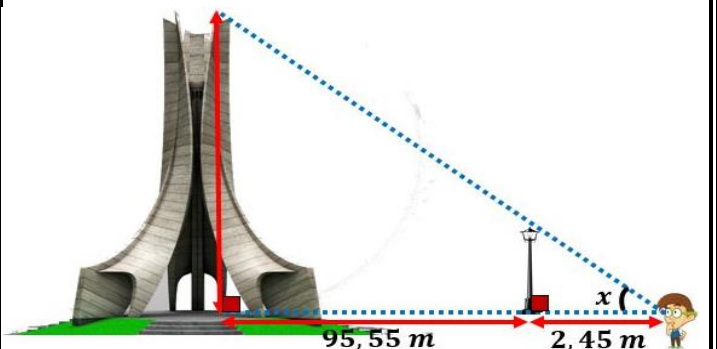
$RST$  مثلث قائم في  $R$  حيث:  $\sin \widehat{RTS} = 0,8$  و  $RS = 8\text{ cm}$ .

1. احسب الطولين  $TR$  و  $ST$ .
2. لتكن  $M$  نقطة من  $[TR]$  حيث  $TM = 4\text{ cm}$ ، المستقيم  $(\Delta)$  العمودي على  $(TR)$  في النقطة  $M$  يقطع  $[TS]$  في النقطة  $N$ .
  - احسب الطول  $MN$  بالتدوير إلى الوحدة من السنتمتر.

### الوضعية 01:

يريد أمجد قياس ارتفاع المعلم التاريخ «مقام الشهيد» المتواجد بالجزائر العاصمة.

لإنجاز هذه المهمة، استعان بعمود كهربائي طوله  $2,30\text{ m}$  ووقف في مكان حيث يشاهد قمة العمود الكهربائي وقمة «مقام الشهيد».



تذكير:

المتطابقات الشهيرة:

تمارين - وضعيات

التمرين 01: انشر، ثم بسط العبارات التالية:

$$(3x + 1)^2 ; (x - 5)^2 ; (2x + \sqrt{3})(2x - \sqrt{3})$$

$$(7x + 9)(x - 1) ; 4x(3x + 6)$$

التمرين 02: حلل العبارات الجبرية:

$$x^2 + 4x + 4 ; 9x^2 - 6x + 1 ; (3x - 4)^2 - (2x + 5)^2$$

$$5x^2 + 10 ; (4x + 3)(x - 2) - (4x + 3)(7x - 1)$$

التمرين 03:

حلل كل عبارة مما يلي:

$$A = 2x\left(\frac{2}{7} - x\right) + \left(\frac{2}{7} - x\right)\left(\frac{5x - 4}{3}\right)$$

$$B = 1, 2x(3, 4 + x) - (x - 6, 5)(3, 4 + x) + (3, 4 + x)$$

$$C = \frac{25}{3}x^2 - \frac{5}{3}x$$

$$D = (x + 5)^2 - (x + 2)^2 + (2x + 7)$$

التمرين 04:

1. حلل كل عبارة مما يلي:

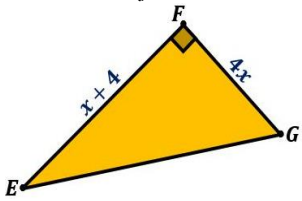
$$E = (2 - x)^2 - 4x^2$$

$$F = (2x + 3)^2 - (x + 1)^2$$

2. انشر كلا من العبارتين  $E$  و  $F$  وبسطهما ثم احسب كلا من  $E + F$  و  $E - F$ .

التمرين 05:

$EFG$  مثلث قائم في  $F$ ، و  $x$  عدد موجب، ووحدة الطول هي السنتيمتر.



1. تحقق من أن مساحة المثلث  $EFG$

تساوي  $2x^2 + 8x$ ، واحسب هذه

المساحة من أجل  $x = 1$ .

2. عبّر عن  $EG^2$  بدلالة  $x$ ، واكتب

العبارة على شكل نشر مبسط.

3. احسب الطول  $EG$  من أجل  $x = 2$ .

التمرين 06:

إليك العبارة الجبرية  $M$  حيث:

$$M = (1 - 2x)^2 - 9 + (4 - 2x)(5x + 3)$$

1. انشر العبارة  $M$ .

2. حلل  $(1 - 2x)^2 - 9$  استنتج تحليلاً للعبارة  $M$ .

3. استعمال العبارة المناسبة لحساب قيمة  $M$  من أجل:  $x = 2$ ؛

$$x = 0 ; x = -\frac{1}{3}$$

التمرين 07:

لتكن العبارة  $T$ .

$$T = (x + 1)(x + 9) - (x + 3)^2$$

1. انشر وبسط العبارة  $T$ .

2. استعمال نتيجة السؤال (1) لحساب كل مما يلي ذهنياً:

$$1, 5 \times 9, 5 - (3, 5)^2 ; 101 \times 109 - 103^2$$

التمرين 08:

1. تحقق بالنشر من أن:  $(2x + 7)(2x - 7) = 4x^2 - 49$

2. لتكن العبارة  $A$  حيث:

$$A = 4x^2 - 49 + (2x + 7)(x - 2)$$

حلل العبارة  $A$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

التمرين 09:

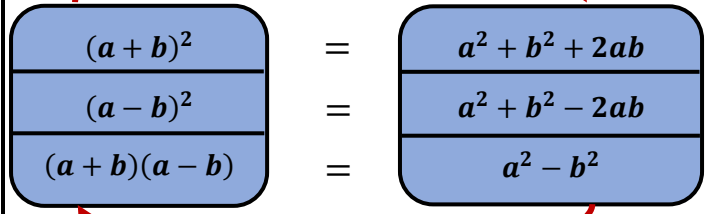
لتكن العبارة  $F$  حيث:

$$F = (2x - 5)^2 - (1 - x)(2x - 3) - 4$$

1. بين أن:  $F = 6x^2 - 25x + 24$  واحسب  $F$  من أجل  $x = 2\sqrt{3}$ .

2. حلل العبارة  $F$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

النشر



التحليل

مثال 01: نشر العبارات الآتية:

$$\blacksquare (2x + 1)^2 = (2x)^2 + (1)^2 + 2(2x)(1)$$

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\blacksquare (x - 3)^2 = (x)^2 + (3)^2 - 2(x)(3)$$

$$(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\blacksquare (\sqrt{3}x + 5)(\sqrt{3}x - 5) = (\sqrt{3}x)^2 - (5)^2$$

$$(\sqrt{3}x + 5)(\sqrt{3}x - 5) = 3x^2 - 25$$

مثال 02: تحليل العبارات الآتية:

$$\blacksquare 9x^2 + 12x + 4 = (3x)^2 + (2)^2 + 2(3x)(2)$$

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2$$

$$\blacksquare x^2 - 2x + 1 = (x)^2 + (1)^2 - 2(x)(1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

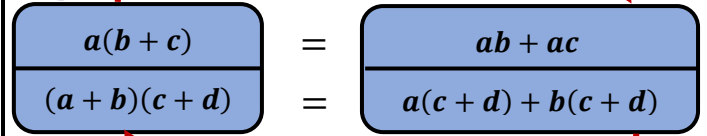
$$\blacksquare 4x^2 - (x + 1)^2 = (2x)^2 - (x + 1)^2$$

$$4x^2 - (x + 1)^2 = [2x + (x + 1)][2x - (x + 1)]$$

$$4x^2 - (x + 1)^2 = (3x + 1)(x - 1)$$

الخاصية التوزيعية:

النشر



التحليل

مثال 01: نشر العبارات الآتية:

$$\blacksquare 4(2x + 1) = 8x + 4$$

$$\blacksquare (x + 5)(3x + 2) = x(3x + 2) + 5(3x + 2)$$

$$(x + 5)(3x + 2) = 3x^2 + 2x + 15x + 10$$

$$(x + 5)(3x + 2) = 3x^2 + 17x + 10$$

$$\blacksquare \sqrt{3}(\sqrt{12}x + 1) = \sqrt{36}x + \sqrt{3} = 6x + \sqrt{3}$$

مثال 02: تحليل العبارات الآتية:

$$\blacksquare 2x + 4 = 2(x + 2)$$

$$\blacksquare 18 - 3x = 3(6 - x)$$

$$\blacksquare 5x^2 - 15x = 5x(x - 3)$$

$$\blacksquare \frac{4}{3}x - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}(x - 4)$$

$$\blacksquare 2x(x + 3) - (x + 3) = (x + 3)(2x - 1)$$

$$\blacksquare 3x - 12 - (x - 4)^2 = 3(x - 4) - (x - 4)^2$$

$$3x - 12 - (x - 4)^2 = (x - 4)[3 - (x - 4)]$$

$$3x - 12 - (x - 4)^2 = (x - 4)(3 - x + 4)$$

$$3x - 12 - (x - 4)^2 = (x - 4)(7 - x)$$

**التمرين 10: (BEM 2007)**لتكن العبارة الجبرية  $E$  حيث:

$$E = 10^2 - (x - 2)^2 - (x + 8)$$

1. انشر ثم بسط  $E$ .
2. حلل العبارة  $10^2 - (x - 2)^2 - (x + 8)$ ، ثم استنتج تحليل العبارة الجبرية  $E$ .

**التمرين 11: (BEM 2008)**عدد  $A = (2 - \sqrt{3})^2$  حيث:

1. انشر، ثم بسط  $A$ .
2. لتكن العبارة الجبرية  $E$  حيث:  $E = x^2 - (7 - 4\sqrt{3})$
- احسب القيمة المضبوطة للعبارة  $E$  من أجل  $x = \sqrt{7}$ .
- حلل  $E$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

**التمرين 12: (BEM 2009)**لتكن العبارة  $E$  حيث:  $E = 2x - 10 - (x - 5)^2$ 

1. انشر، ثم بسط العبارة  $E$ .
2. حلل العبارة  $E$ .

**التمرين 13: (BEM 2011)**

1. تحقق بالنشر من أن:  $(2x - 1)(x - 3) = 2x^2 - 7x + 3$
2. لتكن العبارة  $A$  حيث:

$$A = 2x^2 - 7x + 3 + (2x - 1)(3x + 2)$$

- حلل  $A$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.**التمرين 14: (BEM 2012)**لتكن العبارة  $E$  حيث:

$$P = (4x - 1)^2 - (3x + 2)(4x - 1)$$

1. انشر وبسط العبارة  $E$ .
2. حلل العبارة  $E$  إلى جداء عاملين.

**التمرين 15: (BEM 2014)**لتكن العبارة  $E$  حيث:  $E = (2x + 5)^2 - 36$ 

1. تحقق بالنشر أن:  $E = 4x^2 + 20x - 11$
2. حلل العبارة  $E$  إلى جداء عاملين.

**التمرين 16: (BEM 2015)**تعطى العبارة:  $F = (2x - 3)^2 - 16$ 

1. تحقق بالنشر أن:  $F = 4x^2 - 12x - 7$
2. حلل العبارة  $F$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.
3. احسب  $F$  من أجل  $x = 1 + \sqrt{2}$  و اكتب النتيجة على الشكل  $a + b\sqrt{2}$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان نسيبان.

**التمرين 17: (BEM 2016)**

1. تحقق من صحة المساواة التالية:

$$5(2x + 1)(2x - 1) = 20x^2 - 5$$

2. حلل العبارة  $A$  بحيث:

$$A = (2x + 1)(3x - 7) - (20x - 5)$$

**التمرين 18: (BEM 2017)**لتكن العبارة  $P$  حيث:

$$P = (1 - 3x)(3x + 3) - 2(3x + 3)$$

1. انشر وبسط العبارة  $P$ .
2. حلل العبارة  $P$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

**التمرين 19: (BEM 2018)**

1. تحقق من المساواة الآتية:

$$(3x + 1)(x - 4) = 3x^2 - 11x - 4$$

2. حلل إلى جداء عاملين العبارة:

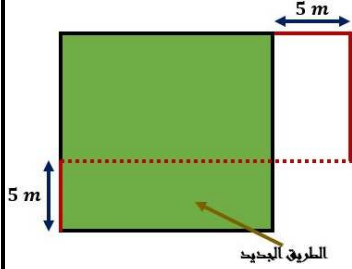
$$E = 3x^2 - 11x - 4 + (3x + 1)^2$$

**التمرين 20: (BEM 2019)**لتكن العبارة  $E$  حيث:  $E = (x + 1)^2 - (x + 1)(2x - 3)$ 

1. انشر ثم بسط العبارة  $E$ .
2. حلل العبارة  $E$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

**الوضعية 01:**

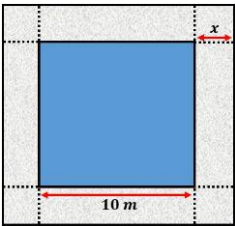
أرادت البلدية شق طريق على حساب قطعة أرض مربعة الشكل يملكها أحمد، وقد اقترحت عليه تغيير أطوالها. حيث يتم اقتطاع 5 أمتار من أحد الأضلاع، وتعويضها بـ 5 أمتار في طول الضلع المجاور (كما هو مبين في الشكل أدناه).



- هل سيقبل أحمد بهذا الاقتراح؟ ولماذا؟

**الوضعية 02:**

الشكل الملون بالأزرق هو حوض شكله مربع، طول ضلعه 10 m. نريد تهيئة شريط منتظم حول هذا الحوض يخصص للراجلين عرضه  $x$ .



- ماهي قيمة  $x$  حتى تكون مساحة الشريط تساوي  $44 m^2$ ؟
- مساعدة:  $x^2 + 10x - 11 = (x - 1)(x + 11)$

**الوضعية 03:**

سلم يتكون من 5 درجات لها نفس الارتفاع 20 cm و نفس العرض 40 cm.



- احسب مساحة الجزء الظاهر في الرسم باستعمال أقل عدد ممكن من العمليات.

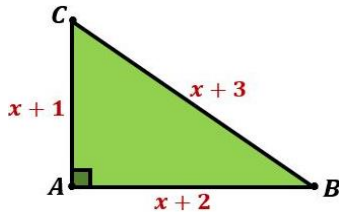
**الوضعية 04: (وحدة الطول هي m)**

هيأت البلدية قطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها  $8x$  و عرضها  $(7x + 5)$ ، لإنشاء 4 عمارات ومساحة خضراء.

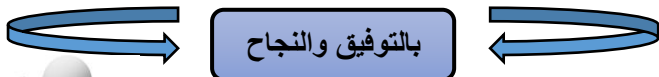
1. أعط عبارة المساحة الخضراء  $S$  بدلالة  $x$  علماً أن بعدي قاعدة العمارة هما  $(x + 5)$  و  $x$ .
2. ماهي العبارة المبسطة للمساحة الخضراء؟
3. أعط عبارة المساحة الخضراء على شكل جداء.
4. احسب المساحة الخضراء إذا كان  $x = 25$ .

**الوضعية 05:**

لدى ياسر قطعة أرض مهيئة لزرعها، الشكل المقابل يمثل مخططاً لها (وحدة الطول هي m).



- ساعد ياسر على إيجاد مساحة هذه الأرض.





## المتطابقات الشهيرة

$$a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$$

$$E = 9x^2 + 12x + 4$$

$$E = (3x)^2 + (2)^2 + 2(3x)(2)$$

$$E = (3x + 2)^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$$

$$F = 9x^2 - 12x + 4$$

$$F = (3x)^2 + (2)^2 - 2(3x)(2)$$

$$F = (3x - 2)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$G = 16x^2 - 49$$

$$G = (4x)^2 - (7)^2$$

$$G = (4x + 7)(4x - 7)$$

$$H = (x - 5)^2 - 49$$

$$H = (x - 5)^2 - (7)^2$$

$$H = [(x - 5) + 7][(x - 5) - 7]$$

$$H = (x - 5 + 7)(x - 5 - 7)$$

$$H = (x + 2)(x - 12)$$

$$M = (x - 5)^2 - (2x + 1)^2$$

$$M = [(x - 5) + (2x + 1)][(x - 5) - (2x + 1)]$$

$$M = (x - 5 + 2x + 1)(x - 5 - 2x - 1)$$

$$M = (3x - 4)(-x - 6)$$

$$N = 4(x - 5)^2 - 9(x + 1)^2$$

$$N = 2^2(x - 5)^2 - 3^2(x + 1)^2$$

$$N = (2(x - 5))^2 - (3(x + 1))^2$$

$$N = (2x - 10)^2 - (3x + 3)^2$$

$$N = [(2x - 10) + (3x + 3)][(2x - 10) - (3x + 3)]$$

$$N = (2x - 10 + 3x + 3)(2x - 10 - 3x - 3)$$

$$N = (5x - 7)(-x - 13)$$

## استخرج العامل المشترك

وحيد حد

$$42x^2 - 24x = 6x(7x - 4)$$

ثنائي حد

ظاهر

$$A = (2x + 1)(x + 3) - (2x + 1)(7x - 5)$$

$$A = (2x + 1)[(x + 3) - (7x - 5)]$$

$$A = (2x + 1)(x + 3 - 7x + 5)$$

$$A = (2x + 1)(-6x + 8)$$

مخفي

بالمضاعفات

$$B = (8x + 4)(x + 3) - (2x + 1)(7x - 5)$$

$$B = 4(2x + 1)(x + 3) - (2x + 1)(7x - 5)$$

$$B = (2x + 1)[4(x + 3) - (7x - 5)]$$

$$B = (2x + 1)(4x + 12 - 7x + 5)$$

$$B = (2x + 1)(-3x + 17)$$

بالمطابقات الشهيرة

$$C = (2x + 1)(x + 3) + x^2 - 9$$

$$C = (2x + 1)(x + 3) + x^2 - 3^2$$

$$C = (2x + 1)(x + 3) + (x + 3)(x - 3)$$

$$C = (x + 3)[(2x + 1) + (x - 3)]$$

$$C = (x + 3)(2x + 1 + x - 3)$$

$$C = (x + 3)(3x - 2)$$

تذكير:

❖ **المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:**

يؤول حل كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى حل معادلة من الشكل  $ax = b$  حيث  $a \neq 0$ . الحل الوحيد لهذه المعادلة هو العدد  $\frac{b}{a}$ .

مثال:

حل المعادلة  $5x - 3 = 7$  نضيف 3 إلى كل طرف فنجد:

$$5x - 3 + 3 = 7 + 3$$

والمعادلة  $5x - 3 = 7$  حل وحيد هو 2.

❖ **معادلة جداء معدوم:**

كل معادلة من الشكل  $(ax + b)(cx + d) = 0$  حيث  $a, b, c, d$  أعداد معلومة، تُسمى معادلة جداء معدوم

مثال 01:  $(3x + 2)(x - 5) = 0$  هي معادلة جداء معدوم.

خاصية الجداء المعدوم:

• إذا كان جداء عاملين معدوماً فإن أحد هذين العاملين على الأقل معدوم.

• بعبارة أخرى إذا كان  $a \times b = 0$  فإن  $a = 0$  أو  $b = 0$ .

مثال 02:  $5x = 0$  يعني أن  $x = 0$  لأن:  $5 \neq 0$ .

❖ **حل معادلة جداء معدوم:**

لحل المعادلة من النوع  $(ax + b)(cx + d) = 0$  حيث أن  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعداد حقيقية معلومة مع  $a \neq 0$  و  $c \neq 0$  نحل المعادلتين:

$$ax + b = 0 \quad \text{و} \quad cx + d = 0$$

مثال: لنحل المعادلة:  $(x + 3)(2x - 5) = 0$

يعني أن:  $x + 3 = 0$  أي:  $x = -3$  أو  $2x - 5 = 0$  أي:  $2x = 5$

ومنه:  $x = \frac{5}{2}$  إذن للمعادلة حلان هما  $-\frac{3}{2}$  و  $\frac{5}{2}$ .

❖ **حل معادلة يؤول حلها إلى حل معادلة جداء معدوم:**

لحل معادلة ليست من الدرجة الأولى نتبع الخطوات التالية:

1. نجعل طرفها الأيمن صفراً.

2. نقوم بتحليل الطرف الأيسر لهذه المعادلة، نتحصل عندئذ على معادلة جداء معدوم من الدرجة الأولى.

3. نحل هذه المعادلة الأخيرة. 4. نستنتج حلول المعادلة الأولى.

مثال: حل المعادلة  $4x^2 = 5x$

لدينا:  $4x^2 - 5x = 0$  أي  $x(4x - 5) = 0$  يعني أن:  $x = 0$

أو  $4x - 5 = 0$  أي:  $4x = 5$  ومنه:  $x = \frac{5}{4}$ .

إذن للمعادلة حلان هما  $\frac{5}{4}$  و 0.

❖ **تربيض مشكلة وحلها:**

لحل مشكلة بواسطة معادلة نتبع الخطوات التالية:

1. اختيار المجهول، وليكن مثلاً  $x$ ;

2. ترجمة كل المعطيات الواردة في النص بدلالة  $x$ ; 3. وضع المعادلة;

4. حل المعادلة; 5. التصريح بالحل; 6. التحقق من صحة النتيجة.

مثال: مستطيل طوله هو 3 مرات عرضه ومحيطه  $240 \text{ cm}$ .

إيجاد طول وعرض المستطيل:

نفرض  $x$  عرض المستطيل فيكون  $3x$  هو طول المستطيل.

لدينا:  $2(x + 3x) = 240$  وعليه:  $2(4x) = 240$

وبالتالي  $8x = 240$ : أي:  $x = \frac{240}{8}$  ومنه:  $x = 30$

إذن عرض المستطيل هو  $30 \text{ cm}$  وطول المستطيل هو  $90 \text{ cm}$  لأن

$$30 \times 3 = 90$$

❖ **المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد:**

• المتراجحة بمجهول  $x$  هي متباينة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة وهذا حسب قيم  $x$ .

• قيم  $x$  التي من أجلها تكون المتباينة صحيحة هي حلول المتراجحة.

• حل متراجحة هو إيجاد كل حلولها.

• يُقال عن متراجحة أنها من الدرجة الأولى لمجهول  $x$ ، إذا أمكن كتابتها

على أحد الأشكال الآتية:

$$ax + b < cx + d \quad \text{أو} \quad ax + b > cx + d$$

$$ax + b \geq cx + d \quad \text{أو} \quad ax + b \leq cx + d$$

مثال 01:

المتباينة  $2x > -3$  هي متراجحة ذات المجهول  $x$ .

من أجل  $x = -4$  نكتب  $-4 > -3$  فنحصل على متباينة

خاطئة  $-3 > -8$  (إذن العدد  $-4$ ) ليس حلاً للمتراجحة  $2x > -3$ .

طريق:

لحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد، نستعمل القواعد الآتية:

• نحافظ على نفس اتجاه المتراجحة عندما نُضيف إلى (أو نطرح من)

طرفيها نفس العدد.

• نحافظ على نفس اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم

طرفيها على) نفس العدد الموجب تماماً.

• نُغيّر اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على)

العدد السالب تماماً نفسه.

مثال 02: حل المتراجحات التالية:

1. لدينا:  $3(x - 2) < 5x + 4$  و بالتالي:  $3x - 6 < 5x + 4$

أي:  $3x - 5x < 4 + 6$  وهذا يكافئ:  $-2x < 10$

وعليه:  $x > \frac{10}{-2}$  ومنه:  $x > -5$

ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم  $x$  الأكبر تماماً من  $-5$ .

2. لدينا:  $5x \geq 20$  أي:  $x \geq \frac{20}{5}$  ومنه:  $x \geq 4$

ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم  $x$  الأكبر من أو تساوي 4.

3. لدينا:  $4x + 2 > 7x + 1$  أي:  $4x - 7x > 1 - 2$

وهذا يكافئ:  $-3x > -1$  وعليه:  $x < \frac{-1}{-3}$  ومنه:  $x < \frac{1}{3}$

ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم  $x$  الأصغر تماماً من  $\frac{1}{3}$ .

4. لدينا:  $6x \leq -18$  أي:  $x \leq \frac{-18}{6}$  ومنه:  $x \leq -3$

ينتج أن حلول هذه المتراجحة هي كل قيم  $x$  الأصغر من أو تساوي  $-3$ .

ملاحظة: نسمي كل عدد يحقق المتراجحة حلاً لها.

❖ **تمثيل حلول متراجحة بيانياً:**

تُمثل حلول متراجحة على مستقيم عددي مدرج (تلون الجزء الذي يمثل

الحلول).

أمثلة:

1. المتراجحة  $x > 2$  تمثل كل قيم  $x$  الأكبر تماماً من 2 وتمثيلها

البياني هو:

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

ليست حلاً للمتراجحة

حلول للمتراجحة

التمرين 01: حل المعادلات:

$$(x - 8)(2x + 5) = 0 ; 11x + 10 = 0 ; 2 + 3x = \frac{1}{2}$$

$$x^2 - \sqrt{3}x = 0 ; x^2 + 8x + 16 = 0 ; \frac{2x+1}{4} = \frac{3x-2}{2}$$

$$(x + 2)(2x + 3) + 7(x + 2) = 0 ; 4x^2 - 9 = 0$$

$$\sqrt{2}x = 1 ; x + 6 = 3x - 4 ; x^2 - 2x + 1 = 0$$

التمرين 02:

أوجد ثلاث أعداد طبيعية متتالية بحيث يكون مجموعها يساوي 24.

التمرين 03:

أوجد عددين طبيعيين بحيث يكون أحدهما ضعف الآخر و مجموعهما 27.

التمرين 04: مستطيل عرضه هو  $\frac{1}{3}$  طوله ومحيطه  $160 \text{ cm}$ .

أوجد طول وعرض المستطيل.

التمرين 05:

$$1. \text{ حل المعادلتين: } 2x - 1 = 5x \text{ و } x^2 - 9 = (x - 1)^2$$

2. حقل مستطيل الشكل مساحته  $250 \text{ m}^2$  وعرضه خمسي طوله.

• أوجد بعدي هذا المستطيل.

التمرين 06: تستقبل متوسطة 528 شخص (تلاميذ وتلميذات وأساتذة)

إذا كان عدد التلميذات  $\frac{2}{3}$  من عدد التلاميذ وعدد الأساتذة  $\frac{1}{6}$  من عدد

التلاميذ. أوجد عدد التلاميذ وعدد التلميذات وعدد الأساتذة؟

التمرين 07:

$$1. \text{ بين ان: } 2(x - 6)(x + 8) = 2x^2 + 4x - 96$$

$$2. \text{ مثلث أطوال أضلاعه: } 10 ; x + 2 ; x$$

• عيّن العدد  $x$  علماً أنّ المثلث قائم ووتره  $10 \text{ cm}$ .

التمرين 08: يبلغ عمر أب 43 سنة وعمر ابنيه 4 و 7 سنوات، بعد كم

سنة يكون عمر الأب ضعف مجموع عمري ابنيه؟

التمرين 09: حل المتراجحات ومثل حلول كل منها بيانياً.

$$5x + 4 \leq x - 1 ; \frac{x+1}{2} \leq \frac{5x+1}{3} ; 6x + \sqrt{3} > x + 2$$

$$-3x - 1 > x + 8$$

التمرين 10: تحقق من أن الأعداد 0؛ -1؛ 5 هي حلول للمتراجحات

$$\text{التالية: } 4(2x + 7) \geq x ; 2x - 1 \leq 3x + 5$$

التمرين 11: مستطيل بعده  $7 \text{ cm}$  و  $16 \text{ cm}$ . ماهو العدد  $x$  المعبر عنه

بالسنتيمتر الذي يمكن إضافته إلى طوله وعرضه بحيث لا يتجاوز محيطه

$86 \text{ cm}$ ؟

التمرين 12:  $ABC$  مثلث قائم في  $A$  بحيث  $AB = 16 \text{ cm}$ .

• عيّن حصرًا لطول الضلع  $[AC]$  بحيث تكون مساحته تساوي على

الأكثر  $72 \text{ cm}^2$  وعلى الأقل  $48 \text{ cm}^2$ .

التمرين 13: لتكن العبارة  $A$  حيث:

$$A = (2x - 1)^2 - 4$$

• حلّ المتراجحة:  $A \geq 4x^2$  ومثلّ الحلول بيانياً.

التمرين 14:

لتكن العبارة  $E$  حيث:  $E = (9x^2 - 1) + 6x^2 + 7x - 3$ .

$$1. \text{ تحقق أن: } (3x - 1)(2x + 3) = 6x^2 + 7x - 3$$

$$2. \text{ حلّ العبارة } 9x^2 - 1$$

3. حلّ العبارة  $E$  إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى.

$$4. \text{ حلّ المعادلة: } E = 0$$

5. حلّ المتراجحة:  $E \geq 3(5x^2 + 1)$  ثم مثلّ مجموعة حلولها بيانياً.

التمرين 15: (BEM 2013)

1. لتكن العبارة:  $A = 3x - 5$  حيث  $x$  عدد حقيقي.

أ. احسب القيمة المقربة إلى  $10^{-2}$  بالنقصان للعدد  $A$  من أجل  $x = \sqrt{2}$

ب. حلّ المتراجحة:  $A \geq 0$  ثم مثلّ مجموعة حلولها بيانياً.

2. أ. انشر ثم بسط العبارة  $B$  حيث:  $B = (3x - 5)^2 + 9x^2 - 25$

$$ب. \text{ استنتج أن: } B = 6x(3x - 5)$$

$$ج. \text{ حلّ المعادلة: } B = 0$$

### الوضعية 01:

#### الجزء الأول:

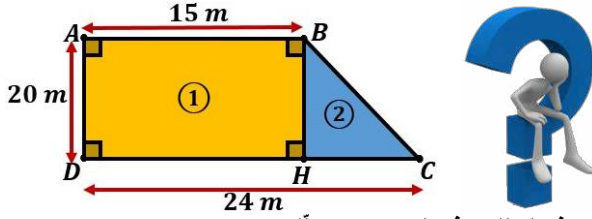
تملك عائلة قطعة أرض على شكل شبه منحرف كما هو مبين في الشكل:

1. بين أن مساحة القطعة تساوي  $390 \text{ m}^2$ .

2. احسب الطول  $BC$  (بالتدوير إلى الوحدة).

#### الجزء الثاني:

لدى هذه العائلة  $80 \text{ m}$  من السلك لتسييح هذه القطعة.



1. هل هذا السلك كافي لتسييحها؟ علّل.

2. لو تركت العائلة باب عرضه  $1 \text{ m}$  فهل يكفي السلك؟

3. إذا كان:  $AB = x$ .

• احسب مساحة القطعة ① و ② بدلالة  $x$ .

4. عيّن العدد  $x$  لكي تكون المساحتان متساويتين.

5. عيّن قيم  $x$  التي يكون من أجلها سُبُع مساحة القطعة  $ABHD$

أقل من مساحة  $BCH$ .

### الوضعية 02:

صفحة مربعة الشكل تعرضت للحرارة، فتمددت طولاً بمقدار  $3 \text{ cm}$  و

عرضاً بمقدار  $1 \text{ cm}$ ، ونتيجة لذلك زادت مساحتها

بمقدار  $23 \text{ cm}^2$ .

• أوجد بعدي الصفحة قبل هذا التغيير وبعده.

### الوضعية 03:

يملك أمجد أرض، يريد أن يستغل قطعة منها مستطيلة الشكل للزراعة

حيث يكون طولها  $300 \text{ m}$  وعرضها لم يقرره بعد.

يود أمجد أن يكون محيط هذه القطعة أقل من  $1000 \text{ m}$  وأن تزيد

مساحتها عن  $9000 \text{ m}^2$ .

1. عبّر عن ذلك بمتراجحتين.

2. حل المتراجحتين.

3. استنتج حصرًا لعرض القطعة.

### الوضعية 04: (BEM 2010)

يمثل الشكل أرضية قاعة حفلات مكونة من مربع ومستطيل ونصف قرص

طول قطر المستطيل يزيد عن طول قطر المربع بـ  $2 \text{ m}$  و مجموع

طوليها  $28 \text{ m}$ .

يريد صاحبها تبليطها ببلاط سعر المتر

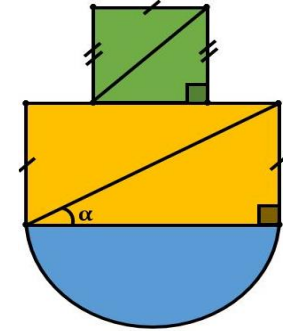
المربع الواحد 800 دينار.

1. احسب طول قطر المربع.

2. احسب طول وعرض المستطيل

علماً أن:  $\cos \alpha = 0,8$ .

3. احسب السعر الإجمالي للبلاط.



بالتوفيق والنجاح



تذكير:

## ❖ الانسحاب ومفهوم الشعاع:

## 1. المنحني والاتجاه:

عندما يكون مستقيمان متوازيان، نقول إن لهذين المستقيمين نفس المنحني.

للمستقيمين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  نفس المنحني معناه  $(d_1) \parallel (d_2)$ .  
النقطتان المتميزتان  $A$  و  $B$  تعينان على المستقيم  $(AB)$ ، اتجاهاً أحدهما من  $A$  نحو  $B$  والآخر من  $B$  نحو  $A$ .



## 2. الانسحاب ومفهوم الشعاع:

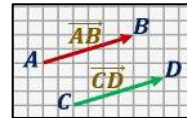
$A$  و  $B$  نقطتان متميزتان. الانسحاب الذي يحول  $A$  إلى  $B$  يحول أيضا  $C$  إلى  $D$ . كل من الثنائيات  $(A; B)$ ،  $(C; D)$ ، تعرف نفس الشعاع  $\vec{u}$  الذي:

- منحاه هو منحى المستقيم  $(AB)$ .
- اتجاهه هو من  $A$  إلى  $B$ .
- طويلته هي طول القطعة  $[AB]$ .

يمكن أن نرمز لهذا الشعاع بالرمز  $\vec{AB}$  (مبدؤه  $A$  ونهايته  $B$ ) أو  $\vec{CD}$ .  
نقول إن كل من  $\vec{AB}$ ،  $\vec{CD}$  هو ممثّل للشعاع  $\vec{u}$ .

## 3. تساوي شعاعين:

القول عن شعاعين أنهما متساويان يعني أن لهما نفس المنحني ونفس الاتجاه ونفس الطول.



مثال:  $\vec{AB} = \vec{CD}$  معناه:

- للشعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$  نفس المنحني ونفس الاتجاه ونفس الطول.
- الانسحاب الذي يحول  $A$  إلى  $B$  يحول أيضا  $C$  إلى  $D$ .

## ❖ إنشاء صورة بالانسحاب علم شعاع:

1. إنشاء مثلثا  $ABC$  ثم النقطة  $D$  صورة  $C$ :

بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{AB}$  يعني  $\vec{CD} = \vec{AB}$ .  
إذن الرباعي  $ABDC$  متوازي أضلاع.

قطرا الرباعي  $ABDC$  هما  $[AD]$  و  $[BC]$ .  
ينتج أن  $D$  هي نظيرة  $A$  بالنسبة إلى النقطة  $E$  منتصف  $[BC]$ .

2. إنشاء النقطة  $F$  حيث:  $\vec{FB} = \vec{AC}$ :

على الشكل لدينا:  $\vec{AC} = \vec{BD}$  إذن  $\vec{FB} = \vec{AC}$  أي  $\vec{FB} = \vec{BD}$ .

نلاحظ أن للشعاعين  $\vec{FB}$  و  $\vec{BD}$  نفس المنحني وهو نفس منحى  $(BD)$ ، نفس الطول وهو  $BD$  ونفس الاتجاه.  
بالتالي:  $B$  منتصف  $[DF]$  أي النقطة  $F$  هي نظيرة  $D$  بالنسبة إلى  $B$ .  
ينتج أن الانسحاب الذي يحول  $D$  إلى  $B$  هو الانسحاب الذي يحول  $B$  إلى  $F$ .

## ❖ الشعاعان المتساويان ومتوازي الأضلاع:

خاصية:  $A, B, C, D$  أربع نقط بحيث كل ثلاثة منها ليست في استقامة.

$\vec{AB} = \vec{DC}$  تعني أن الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع.

ملاحظات: من أجل كل أربع نقط  $A, B, C, D$  لدينا:

- معناه  $\vec{AB} = \vec{DC}$  للقطعتين  $[AC]$  و  $[BD]$  نفس منتصف.



• إذا كان  $\vec{AB} = \vec{DC}$  فإن  $\vec{AD} = \vec{BC}$ .

حالة خاصة: النقط  $A, B, C, D$  في استقامة.

## ❖ إثبات تساوي شعاعين:

## طريقة:

لإثبات تساوي شعاعين نعتمد على متوازي أضلاع أو على الانسحاب.

## ❖ الشعاعان المتساويان ومفهوم منتصف قطعة:

خاصية:  $A, B, I$  ثلاث نقط.

إذا كان  $I$  منتصف  $[AB]$  فإن  $\vec{AI} = \vec{IB}$ .

إذا كان  $I$  منتصف  $[AB]$  فإن  $\vec{AI} = \vec{IB}$ .

إذا كان  $\vec{AI} = \vec{IB}$  فإن  $I$  منتصف  $[AB]$ .

على الشكل المقابل لدينا  $\vec{AI} = \vec{IB}$  لأن للشعاعين  $\vec{AI}$  و  $\vec{IB}$  نفس المنحني ونفس الاتجاه و  $AI = IB$  إذن  $I$  منتصف  $[AB]$ .



نفس المنحني ونفس الاتجاه و  $AI = IB$  إذن  $I$  منتصف  $[AB]$ .

## ❖ مجموع شعاعين:

## 1. صورة نقطة بانسحابين متتابعين:

$A, B, C$  ثلاث نقط.

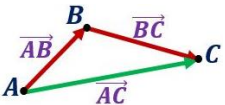
إذا كانت صورة نقطة كيفية  $M$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{AB}$  هي  $N$  وصورة  $N$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{BC}$  هي  $G$  فإن:

$G$  هي صورة  $M$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{AC}$ .  
ونقول  $\vec{AC}$  هو مجموع الشعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$ .

## 2. مجموع شعاعين:

$A, B, C$  ثلاث نقط.

مجموع الشعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{BC}$  هو الشعاع  $\vec{AC}$ .  
نكتب  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$



المساواة  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  تسمى علاقة شال (لاحظ أن نهاية الشعاع  $\vec{AB}$  هو مبدأ الشعاع  $\vec{BC}$ )

حالة خاصة: إذا كانت  $A$  منطبقة على  $B$ ، نقول أن  $\vec{AB}$  هو شعاع المدموم ويرمز إليه بـ  $\vec{0}$ . لدينا:  $\vec{AA} = \vec{BB} = \vec{0}$ .

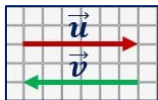
## ❖ الشعاعان المتعاكسان:

$A, B$  نقطتان. نعلم أن:  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$ .

نقول أن الشعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{BA}$  متعاكسان، ونكتب:  $\vec{AB} = -\vec{BA}$ .  
للشعاعين المتعاكسين نفس الطول ونفس المنحني واتجاهين متعاكسين.

مثال: الشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعاكسان.

$$\vec{u} = -\vec{v}$$



## ❖ قاعدة متوازي الأضلاع:

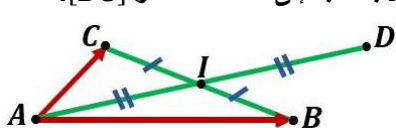
$A, B, C$  ثلاث نقط ليست على استقامة.

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

معناه:  $ABDC$  متوازي أضلاع.



ملاحظة:  $D$  هي نظيرة  $A$  بالنسبة إلى منتصف القطر  $[BC]$ .



## ❖ إنشاء ممثّل لمجموع شعاعين:

طريقة: لإنشاء ممثّل لمجموع شعاعين يمكن استعمال علاقة شال أو قاعدة الأضلاع.

## ❖ استعمال تساوي شعاعين لإنجاز برهان:

طريقة: لإثبات أن شعاعين  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$  متساويان، يكفي إثبات أن الرباعي  $ABDC$  متوازي أضلاع.

## ❖ خصائص الأشكال الرباعية:

متوازي الأضلاع: - كل ضلعان في متوازي الأضلاع متوازيان و

متقايسان - قطرا متوازي الأضلاع متناصفان - مركز تناظر متوازي الأضلاع هو نقطة تقاطع قطريه.

المستطيل: - كل ضلعان في المستطيل متوازيان و متقايسان - قطران المستطيل متناصفان و متقايسان - مركز تناظر المستطيل هو نقطة تقاطع قطريه - زواياه الأربعة قائمة.

المربع: - كل أضلاعه متقايسة و زواياه قائمة - قطرا المربع متناصفان و متقايسان و متعامدان - مركز تناظر المربع هو نقطة تقاطع قطريه - للمربع أربعة محاور هي حاملات قطراه و محورا كل ضلعان متقابلان.

المعين: - كل أضلاعه متقايسة - قطرا المعين متناصفان و متعامدان - مركز تناظر المعين هو نقطة تقاطع قطريه - حاملات قطراه هما محورا تناظره.

التمرين 01:

$ABC$  مثلث  $E$  منتصف  $[AC]$ .

1. أنشئ النقطة  $D$  حيث:  $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ .
2. ماهي صورة  $D$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{CA}$ ؟
3. احسب المجاميع الآتية مع الشرح:  
 $\vec{AE} + \vec{CE}$  ;  $\vec{AB} - \vec{CB}$  ;  $\vec{CD} + \vec{BD}$

التمرين 02:

$ABCD$  متوازي الاضلاع.

1. أنشئ النقطة  $E$  بحيث:  $\vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AE}$  ما نوع الرباعي  $ACED$ ؟ مع التعليل.
2. أنشئ النقطة  $F$  بحيث:  $\vec{CA} + \vec{CF} = \vec{0}$ .
3. أنشئ  $G$  نظيرة  $D$  بالنسبة إلى  $C$ .
4. بين أن:  $\vec{GB} = \vec{CA}$ .

التمرين 03:

$A, B, C$  ثلاث نقاط ليست في استقامة.

1. أنشئ النقطة  $D$  بحيث أن: صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{BC}$ .
2. أنشئ النقطة  $K$  بحيث:  $\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{AC}$ .
3. بين أن:  $\vec{KC} = \vec{CD}$  واستنتج أن  $C$  منتصف  $[DK]$ .

التمرين 04:

1. أرسم معيناً  $ABCD$  قطراه  $AC = 6 \text{ cm}$  ;  $BD = 4 \text{ cm}$ .
2. احسب  $AB$ .
3. عين النقطة  $E$  حيث  $C$  منتصف  $[BE]$ .
4. أنشئ النقطة  $M$  صورة  $C$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{DC}$ .
5. ما نوع الرباعي  $DBME$ ؟ علل.

التمرين 05:

$ABC$  مثلث قائم في  $A$  حيث:  $AB = 4 \text{ cm}$  و  $AC = 5 \text{ cm}$ .

1. أنشئ النقطة  $M$  صورة  $B$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{AC}$ .
2. أنشئ  $D$  بحيث:  $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}$ .
3. برهن أن النقط  $M, C, D$  في استقامة.

التمرين 06:

1. أنشئ دائرة مركزها  $O$  ونصف قطرها  $4 \text{ cm}$ . ليكن  $[AB]$  قطر هذه الدائرة.
2. عين النقطة  $C$  من الدائرة بحيث:  $AC = 6 \text{ cm}$ .
3. أنشئ النقط  $F, N, E$  صورة النقط  $A, C, B$  على الترتيب بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{OC}$ .
4. احسب محيط ومساحة المثلث  $FEN$ .

التمرين 07:

1. أرسم مثلثاً  $ABC$  ثم عين النقطة  $E$  منتصف القطعة  $[BC]$ .
2. أنشئ النقطة  $M$ , نظيرة النقطة  $A$  بالنسبة للنقطة  $E$ .
- أثبت أن:  $\vec{MC} = -\vec{AB}$ .
3. أنشئ النقطة  $N$  صورة النقطة  $C$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{BA}$ .
- بين أن: النقطة  $C$  هي منتصف القطعة  $[MN]$  ثم استنتج نوع الرباعي  $ABCN$ .

التمرين 08: (BEM 2012)

$(T)$  دائرة مركزها  $O$  وقطرها  $AB = 8 \text{ cm}$ ,  $C$  نقطة من دائرة حيث:  $BC = 3 \text{ cm}$ .

1. احسب بالتدوير إلى الوحدة من الدرجة قيس الزاوية  $\widehat{BAC}$  ثم استنتج قيس الزاوية  $\widehat{BOC}$ .
- $F$  هي صورة  $B$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{OB}$ , المستقيم الذي يشمل  $F$  ويوازي  $(BC)$  يقطع  $(AC)$  في  $D$ .
2. احسب  $DF$ .

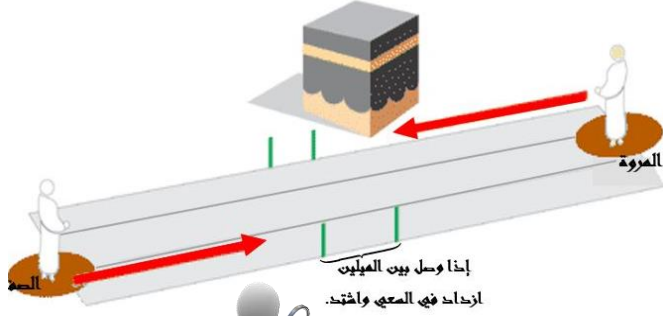
**ملاحظة:** يطلب إنجاز الشكل الهندسي.

التمرين 09: (BEM 2016)

1. أنشئ المثلث  $EFG$  القائم في  $F$  حيث:  $EF = FG = 4 \text{ cm}$ .
2. أنشئ النقطتين  $D$ : صورة النقطة  $F$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{EF}$ .
3. أنشئ النقطة  $C$  صورة النقطة  $E$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{GD}$ .
3. بين أن الرباعي  $EGDC$  مربع.
  - احسب مساحته.
4. ليكن الشعاع  $\vec{U}$  حيث:  $\vec{U} = \vec{EF} + \vec{EC} + \vec{FG}$ ; بين أن:  $\vec{U} = \vec{ED}$ .

الوضعية 01:

السعي بين الصفا والمروة هو ركن من أركان الحج، ولهذا الغرض خصص رواقين متوازيين لتسهيل حركة الحجاج، ينطلق الحاج هيثم من الصفا والحاج عبد النور من المروة في نفس الوقت.

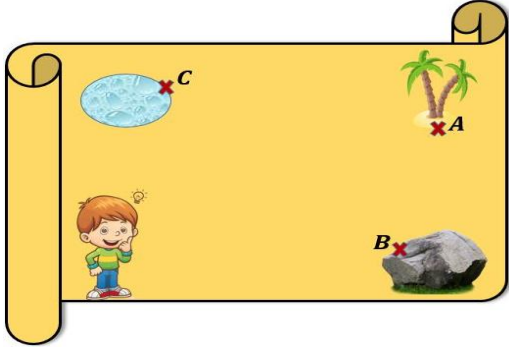


إذا وصل بين المبلين  
ازداد في المعى واقتدى.

1. مثل مسار الحاجين بشعاعين.
2. فسر ملاحظتك.

الوضعية 02:

في احدى مناطق الصحراء وجد أحمد في خزانه جده خريطة كنز مخبأ في احدى الواحات. في هذه الواحة توجد نخلة  $A$ , صخرة  $B$  و بركة ماء  $C$  حيث:  $AB = 3 \text{ m}$ ,  $AC = 4 \text{ m}$  و  $BC = 5 \text{ m}$ .



1. بين أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$ .
1. أنشئ المثلث  $ABC$  ( نأخذ  $1 \text{ cm}$  لكل  $1 \text{ m}$  ) مع تمثيل الأشعة  $\vec{BA}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{BC}$  مستنتجا العلاقة بين الأشعة الثلاثة.
2. قرأ أحمد في الخريطة العبارة: ابحث عن البئر  $E$  الذي هو مركز الدائرة المحيطة بالنخلة و الصخرة و بركة الماء. أنشئ النقطة  $E$ .
3. عندما عثر أحمد على البئر وجد مكتوبا على جداره العبارة: أذهب إلى القبة مكان الكنز  $F$  التي هي نظيرة النخلة  $A$  بالنسبة إلى البركة  $C$ . أنشئ النقطة  $F$  مكان الكنز.

بالتوفيق والنجاح



تذكير:

## ❖ معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين:

تكتب معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين  $x$  و  $y$  على شكل:  $ax + by = c$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد معلومة. إن حلول هذه المعادلة غير منتهية ويكفي إعطاء قيمة لأحد المجهولين لإيجاد الآخر.

**ملاحظة:** المعادلتان المتكافئتان معادلتان لهما نفس الحلول.

**مثال:** كل من  $x + 3y = -\frac{1}{2}$  ؛  $2x + 6y = -1$  هما معادلتان من

الدرجة الأولى بمجهولين وهما معادلتان متكافئتان.

## ❖ جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين:

نسمى جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين  $x$  و  $y$  كل جملة من الشكل:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حيث  $a, b, c, a', b', c'$  أعداد معلومة.

**مثال:**

جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين  $x$  و  $y$ .

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 2x - 5y = -7 \end{cases}$$

## ❖ حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين جبرياً:

هو إيجاد الثنائيات  $(x, y)$  التي تحقق المعادلتين في آن واحد من أجل ذلك نتبع إحدى الطرق التالية:

## 1. طريقة الحل بالتعويض:

**مثال 01:** حل الجملة:

$$\begin{cases} x - 3y = -8 \dots (1) \\ 2x + y = 5 \dots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد:  $x = -8 + 3y$  ... (3)

نعوض قيمة  $x$  في المعادلة (2) فنجد:  $2(-8 + 3y) + y = 5$  أي:

$$-16 + 6y + y = 5 \quad \text{أي: } 6y + y = 5 + 16 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$7y = 21 \quad \text{أي: } y = \frac{21}{7} \quad \text{ومنه: } y = 3$$

نعوض قيمة  $y$  في المعادلة (3) فنجد:  $x = -8 + 3 \times 3$  أي:  $x = 1$

إذن الثنائية (1, 3) حل لهذه الجملة.

## 2. طريقة الحل بالجمع:

**مثال 02:** حل الجملة:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 3 \dots (1) \\ 3x - 5y = -9 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (2) في العدد -2 فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases} 6x + 4y = 3 \dots (3) \\ -6x + 10y = 18 \dots (4) \end{cases}$$

نجمع طرفي المعادلتين (3) و (4) طرفاً لطرف فنجد:

$$6x + 4y - 6x + 10y = 3 + 18 \quad \text{أي: } 14y = 21 \quad \text{وبالتالي:}$$

$$y = \frac{21}{14} \quad \text{ومنه: } y = 1,5$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 5 ونضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 4 فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases} 30x + 20y = 15 \dots (5) \\ 12x - 20y = -36 \dots (6) \end{cases}$$

نجمع طرفي المعادلتين (5) و (6) طرفاً لطرف فنجد:

$$42x = -21 \quad \text{أي: } 30x + 20y + 12x - 20y = 15 - 36$$

$$\text{وعليه: } x = -\frac{21}{42} \quad \text{ومنه: } x = -0,5$$

إذن الثنائية (-0,5, 1,5) حل لهذه الجملة.

## 3. طريقة الحل بالجمع والتعويض:

**مثال 03:** حل الجملة:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -3 \dots (1) \\ 7x - 3y = 10 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد -7 ونضرب طرفي المعادلة (2) في العدد 2 فنحصل على الجملة:

$$\begin{cases} -14x - 35y = 21 \dots (3) \\ 14x - 6y = 20 \dots (4) \end{cases}$$

بجمع طرفي المعادلتين (3) و (4) طرفاً لطرف فنجد:

$$-41y = 41 \quad \text{أي: } -14x - 35y + 14x - 6y = 21 + 20$$

$$\text{وعليه: } y = -\frac{41}{41} \quad \text{ومنه: } y = -1$$

نعوض قيمة  $y$  في المعادلة (2) فنجد:  $7x - 3 \times (-1) = 10$  أي:

$$7x + 3 = 10 \quad \text{وعليه: } 7x = 10 - 3 \quad \text{أي: } 7x = 7$$

$$\text{وعليه: } x = \frac{7}{7} \quad \text{ومنه: } x = 1$$

إذن الثنائية (1, -1) حل لهذه الجملة.

## ❖ حل تربيض مشكلة بتوظف جملة معادلتين:

1. اختيار المجهولين. 2. تربيض الوضعية بالتعبير عنها بمعادلتين.

3. حل جملة معادلتين. 4. مراقبة النتيجة (معقوليتها ملاءمتها للمعطيات).

5. الإجابة عن السؤال.

**مثال:** ثمن باقة زهور متكونة من 8 زهور أقحوان و زهرة نرجس هو

$$255 \text{ DA} \quad \text{بينما ثمن باقة متكونة من 17 زهرة أقحوان و 4 زهور}$$

نرجس هو 570 DA.

ما هو ثمن كل من زهرة الأقحوان و ثمن زهرة النرجس؟

• نفرض أن  $x$  ثمن زهرة الأقحوان و  $y$  ثمن زهرة النرجس فيكون:

$$\begin{cases} 8x + y = 255 \dots (1) \\ 17x + 4y = 570 \dots (2) \end{cases} \quad \text{نحل الجملة:}$$

$$\text{من المعادلة (1) نجد: } y = 255 - 8x \dots (3)$$

نعوض قيمة  $y$  في المعادلة (2) فنجد:  $17x + 4(255 - 8x) = 570$

$$\text{أي: } -15x = 570 - 1020 \quad \text{أي: } -15x = -450$$

$$\text{وعليه: } x = \frac{-450}{-15} \quad \text{أي: } x = 30$$

نعوض قيمة  $x$  في المعادلة (3) فنجد:  $y = 255 - 8 \times 30$

$$\text{ومنه: } y = 15$$

إذن ثمن زهرة الأقحوان هو 30 DA و ثمن زهرة النرجس هو 15 DA.

تمارين - وضعيات

## التمرين 01:

تعتبر المعادلة التالية  $x - y = 4$  من الدرجة الأولى بمجهولين :

• اذكر إن كانت كل من الثنائيات الآتية حلاً لهذه المعادلة مع تعليل.

$$(0; 1) ; (2; -2) ; (-2; 2)$$

## التمرين 02:

اذكر حلين مختلفين لكل معادلة من المعادلات الآتية:

$$\text{أ. } x - y = 0$$

$$\text{ب. } 4x + 2y = 5$$

$$\text{ج. } 4x - 5y = -2$$

التمرين 03: لتكن الجملة التالية:

$$\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 5x + 2y = 11 \end{cases}$$

• عيّن الحل المناسب لهذه الجملة: (3, 2) ؛ (3, -2) ؛ (-3, -2).

## التمرين 04:

حل جمل المعادلتين مع اختيار أي طريقة مع توضيح جميع الخطوات:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x + 1,5y = 2 \\ 2,5x + 0,5y = -1,5 \end{cases} ; \begin{cases} 3x - 15y = -2 \\ 6x + 10y = 4 \end{cases}$$

## التمرين 05:

اوجد عددين علماً أن مجموعهما -3 و أن الفرق بين ضعف العدد الأول

و ثلاثة أمثال العدد الثاني هو 14.

## التمرين 06:

عددان طبيعيين مجموعهما 2020 والفرق بينهما 32.

• عيّن هذين العددين.

## التمرين 07:

اوجد كسراً، إذا أضفنا إلى بسطه 1 و أنقصنا من مقامه 1 يكون ناتج

الكسر هو 1، وإذا أضفنا إلى المقام 1 يكون ناتج الكسر مساوياً  $\frac{1}{2}$ .



تذكير:

## الدالة الخطية:

تعريف:

 $a$  عدد معطى.عندما نرفق كل عدد  $x$  بالجداء  $a \times x$  نقول أننا عرفنا دالة خطية  $f$  معاملها  $a$ .العدد  $a \times x$  يسمى صورة  $x$  بالدالة  $f$  ونرمز لهذه الصورة بالرمز $f(x) = ax$  ونكتب  $f(x)$ .نرمز لهذه الدالة بـ  $f: x \rightarrow ax$ .

## مثال 01:

الدالة  $f$  التي ترفق كل عدد  $x$  بنصفه هي دالة خطية نرمز لها بـ:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \quad \text{أو} \quad f: x \rightarrow \frac{1}{2}x$$

تعيين صورة عدد بدالة، تعيين عدد إذا عُلِّمت صورته بدالة:

إذا كانت  $f$  دالة خطية معرفة كما يلي:  $f(x) = ax$  فإنه يمكننا إيجاد صورة عدد بهذه الدالة ( بالتعويض ) أو إيجاد عدد علمت صورته بهذه الدالة كذلك ( بحل معادلة من الدرجة الأولى ).مثال 02: لتكن الدالة  $g$  المعرفة كما يلي:  $g(x) = 12x$ 1. لتعيين صورة  $\frac{1}{2}$  بهذه الدالة نعوض  $x$  بـ  $\frac{1}{2}$  نجد:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

2. لإيجاد العدد الذي صورته 36 بالدالة  $g$  نعوض  $g(x) = 36$ 

$$x = 3 \quad \text{ومنه:} \quad x = \frac{36}{12} = 3$$

فالعدد الذي صورته 36 بالدالة  $g$  هو العدد 3.

قراءة تمثيل بياني لدالة خطية:

لتعيين صورة عدد بدالة، نقرأ ترتيب النقطة من التمثيل البياني التي فصلتها هذا العدد.

لتعيين عدد صورته معلومة  $n$  بدالة، نقرأ فاصلة النقطة من التمثيل البياني التي ترتيبها  $n$ .مثال 04: المستقيم  $(D)$  يمثل بيان دالة خطية  $f$ .

بقراءة بيانية:

صورة 4 هي 2. إذن  $f(4) = 2$ .

صورة -4 هي 2. إذن:

$$f(-4) = -2$$

هو العدد الذي صورته  $\frac{1}{2}$  إذن:

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

تعيين دالة خطية انطلاقاً من عدد وصورته:

لتعيين دالة خطية  $f$  علماً أن  $f(m) = n$  نحل المعادلة  $am = n$  ذات المجهول  $a$ .مثال 03: عين الدالة الخطية  $h$  إذا علمت أن:  $h(3) = -7$ .الدالة  $h$  من الشكل  $h(x) = ax$ . إذن  $h(3) = -7$  معناه  $3a = -7$ أي:  $a = -\frac{7}{3}$  إذن العبارة الجبرية لدالة  $h$  هي:  $h(x) = -\frac{7}{3}x$ .

التمثيل البياني لدالة خطية:

في مَعْلَم، التمثيل البياني لدالة خطية معاملها  $a$  هو مستقيم يشمل المبدأ إذن تكفي نقطة واحدة تختلف عن المبدأ لرسمه.نقول إن  $y = ax$  هي معادلة لهذا المستقيم و  $a$  هو معامل توجيه له.مثال 05: التمثيل البياني للدالة الخطية  $g: x \rightarrow -2x$ هو مستقيم يشمل المبدأ  $O$ .لإنشائه يكفي تعيين نقطة ثانية من  $(D_1)$ ، مثلاًالنقطة  $A(1; -2)$ . $(D_2)$  هو التمثيل البياني للدالة  $h: x \rightarrow 2x$ .ملاحظة: يعين المعامل  $a$  للدالة الخطية منحنىالمستقيم  $(D_1)$ .• إذا كان  $a > 0$  فإن  $(D_1)$  « يصعد ».• إذا كان  $a < 0$  فإن  $(D_2)$  « ينزل ».

## الدالة الخطية و التناسبية:

جدول قيم دالة خطية هو جدول فيه أعداد السطر الثاني هي صورة أعداد السطر الأول بالدالة الخطية.

جدول قيم دالة خطية هو جدول تناسبية.

معامل الدالة الخطية هو معامل تناسبية لهذا الجدول.

مثال:  $f$  هي الدالة الخطية المعرفة بالشكل:  $f(x) = -3x$ .جدول القيم للدالة  $f$  الآتي هو جدول تناسبية.

$x$	-2,5	-1	0	1	2,5
$f(x)$	7,5	3	0	-3	-7,5

 $(-3)$  هو معامل تناسبية لهذا الجدول وهو أيضاً معامل الدالة الخطية.

## تطبيقات التناسبية:

الدوال الخطية والنسب المئوية:



	أخذ $t\%$ من $x$ يعني ضرب $x$ في $\frac{t}{100}$	زيادة $x$ بـ $t\%$ يعني ضرب $x$ في $1 + \frac{t}{100}$	تخفيض $x$ بـ $t\%$ يعني ضرب $x$ في $1 - \frac{t}{100}$
الدالة الخطية المرفقة	$x \rightarrow \frac{t}{100}x$	$x \rightarrow \left(1 + \frac{t}{100}\right)x$	$x \rightarrow \left(1 - \frac{t}{100}\right)x$

أخذ 5% من  $x$  يعني ضرب  $x$  في 0,05 والدالة المرفقة هي

$$x \rightarrow 0,05x$$

زيادة 5% من  $x$  يعني ضرب  $x$  في 1,05 والدالة المرفقة هي

$$x \rightarrow 1,05x$$

تخفيض 5% من  $x$  يعني ضرب  $x$  في 0,95 والدالة المرفقة هي

$$x \rightarrow 0,95x$$

## استعمال النسب المئوية:

تخفيض  $x$  بـ  $t\%$  ثم زيادة الناتج بـ  $t'$ ، يعني ضرب  $x$  في الجداء

$$\left(1 - \frac{t}{100}\right) \left(1 + \frac{t'}{100}\right)$$

مثال: خزان ماء مملوء تبلغ سعته  $30 m^3$ ، أفرغنا 30% منه ثم أضفنا15% مما فيه. يصبح حجم الماء الخزان:  $24,15 m^3$ 

$$\text{لأن } 30 \times \left(1 - \frac{30}{100}\right) \left(1 + \frac{15}{100}\right) = 24,15$$

## المقادير المركبة:

عندما نحسب جداء مقدارين نتحصل على مقدار جداء.

## أمثلة:

## مساحة مستطيل:

طول مستطيل هو 8 cm وعرضه 3 cm. مساحته هي  $(8 \times 3) cm^2$ أي:  $24 cm^2$ .  $A$  هي مساحة مستطيل،  $L$  طولها و  $l$  عرضه.نكتب  $A = L \times l$  هو مقدار جداء.

## الطاقة الكهربائية:

يستهلك جهاز كهربائي  $1,2 kw$  في 1 h في 5 h، يستهلك هذا الجهاز $1,2 kw \times 5 h$  أي:  $6 kw/h$ . إذن الطاقة الكهربائية  $E$  التييستهلكها جهاز استطاعته  $P$  في مدة زمنية  $t$  هي  $E = P \times t$ .

## مقدار حاصل القسمة:

عندما نحسب حاصل قسمة مقدارين، نتحصل على مقدار حاصل القسمة.

## أمثلة:

السرعة المتوسطة لمتحرك هي حاصل قسمة المسافة المقطوعة

على مدة قطع هذه المسافة.

$$\text{نكتب } v(km/h) = \frac{d(km)}{t(h)} \quad \text{أو} \quad v(m/s) = \frac{d(m)}{t(s)}$$

الكتلة الحجمية لجسم هي حاصل قسمة كتلة هذا الجسم على حجمه.

نكتب  $m_v = \frac{m}{v} (kg/m^3)$ . السرعة المتوسطة لدراسة عندما تقطعمسافة 42 km في 1,5 h هي  $\left(\frac{42}{1,5}\right) km/h$  أي  $28 km/h$ .الكتلة الحجمية لجسم كتلته 2,4 kg وحجمه  $0,01 m^3$  هي

$$\left(\frac{2,4}{0,01}\right) kg/m^3 \quad \text{أي} \quad (240) kg/m^3$$

## تمارين - وضعيات

**التمرين 01:** سعر حذاء رياضي هو  $2500 DA$ . أصبح هذا السعر  $2400 DA$  بعد التخفيض.



1. عين الدالة الخطية التي تتمذج هذه الوضعية.
2. ماهي نسبة هذا التخفيض؟

**التمرين 02:** سعر سروال رياضي هو  $3000 DA$ . أصبح هذا السعر بعد زيادة  $3240 DA$ .



1. ماهو معامل الدالة الخطية التي تتمذج هذه الوضعية؟
2. استنتج النسب المئوية بهذه الزيادة.

**التمرين 03:** خفّض تاجر سعر منتج بـ  $5\%$ .

1. عبّر عن السعر  $y$  للمنتج بعد التخفيض بدلالة السعر  $x$  قبل التخفيض.
2. إذا كان سعر المنتج هو  $1200 DA$  قبل التخفيض فما هو سعره بعد التخفيض؟
3. إذا كان سعر المنتج هو  $1900 DA$  بعد التخفيض فما هو سعره قبل التخفيض؟

**التمرين 04:**

هل الدوال التالية دوال خطية؟ في حالة الإيجاب عين المعامل.

$$h: x \rightarrow x^2, \quad g: x \rightarrow 4x + \sqrt{3}, \quad f: x \rightarrow 2\pi x$$

**التمرين 05:**

1. عين الدالة الخطية  $f$  التي تمثيلها البياني يشمل النقطة  $E(3; 6)$ .
2. هل النقطة  $K(-1; -2)$  تنتمي الى هذا التمثيل؟
3. اوجد العدد الذي صورته 4 بالدالة  $f$ .
4. اوجد صورة العدد 7 بالدالة  $f$ .

**التمرين 06:** هي الدالة الخطية المعرّفة بالدستور  $g(x) = -\sqrt{3}x$ .

1. احسب  $g(0)$ ,  $g(-4)$ ,  $g(2\sqrt{3})$ .
2. عين صور الأعداد  $\sqrt{12}$ ,  $-3$ ,  $5$ .
3. عين العدد الذي صورته  $\sqrt{3}$ .

**التمرين 07:** مثلّ بيانيا الدوال التالية:

$$h: x \rightarrow \frac{4}{5}x, \quad g: x \rightarrow -\frac{5}{4}x, \quad f: x \rightarrow 3x$$

**التمرين 08:** نعتبر الدالة الخطية  $h$  حيث  $h(-2, 5) = 6$ .

1. مثلّ بيانيا الدالة  $h$ .
2. ماهو معامل الدالة  $h$ ؟
3. عين العدد الذي صورته  $-4, 8$ .

**التمرين 09:** نعتبر قرصا نصف قطره  $r$ . محيطه  $P$  ومساحته  $A$ .

$r$ (بالمتر)	2,5	3	9,5
$P$ (بالمتر)	$5\pi$		
$A$ (بالمتر المربع)			$90,25\pi$

1. انقل الجدول السابق وأتممه.
2. هل  $P$  و  $A$  متناسبان؟ في حالة الإيجاب عين معامل التناسبية.
3. هل  $r$  و  $A$  متناسبان؟ في حالة الإيجاب عين معامل التناسبية.

**التمرين 10:** ثمن هاتف نقال  $25400 DA$ ، ازداد ثمنه بـ  $5\%$ ، ماهو مقدار الزيادة؟

**التمرين 11:** وزن أحمد  $60kg$ ، ازداد وزنه بـ  $25\%$ . ماهو وزنه الجديد؟

**التمرين 12:** خزان ماء مملوء  $5 m^3$ ، أفرغنا  $30\%$  من سعته، ثم أضفنا  $20\%$  من محتواه.

كم أصبح محتوى الخزان بالمتر المكعب ( $m^3$ )، ثم باللتر ( $l$ ).

**التمرين 13:** احسب المسافة المقطوعة  $d$  في دقيقة واحدة لدرّاج يسير بسرعة  $54 km/h$ .

**التمرين 14:** مستطيل طوله  $15 cm$  وعرضه  $12 cm$ . نزيد  $20\%$  في طوله وننقص  $20\%$  من عرضه.

1. احسب الطول والعرض الجديدين لهذا المستطيل.

2. ماهي نسبة التغير في مساحة هذا المستطيل؟

**الوضعية 01:** تقترح شركة سيارات أجرة تسعيرتين للمسافة  $500 km$ .



**التسعيرة الأولى:**  $20 DA$  للكيلومتر الواحد.

**التسعيرة الثانية:** مبلغ ثابت قدره  $4000 DA$ .

- استعمال تمثيلا بيانيا لتحديد أفضل التسعيرتين.

**الوضعية 02:**

دخل يوسف مكتبة صباحا لشراء كراس بثمان  $42 DA$  الذي يزيد عن الثمن القديم للكراس بنسبة  $20\%$ .



• ماهو الثمن القديم للكراس؟

**الوضعية 03:**

يمثل الماء  $80\%$  من وزن الإنسان.

1. ماهو وزن الماء وحجمه لشخص

يزن  $75kg$ ، إذا علمت أن الكتلة الحجمية

للماء هي  $1 g/cm^3$ ؟

2. ماهو وزن شخص، حجم الماء المتواجد في

جسمه هو  $50 l$ ؟



**الوضعية 04:**

أراد صانع أن يعرف مدى نقاوة سبيكة من الذهب كتلتها  $500 g$  وذلك

بقياس حجمها، فوجد أن حجمها  $27 cm^3$ .

إذا علمت أن الكتلة الحجمية للذهب

هي  $19,3 g/cm^3$ .

- فهل هذه السبيكة مغشوشة؟



**الوضعية 05:**

بلغ ارتفاع الماء في السد  $45 m$ .

وبسبب قلة المطر انخفض الماء بنسبة  $2\%$ .

وبعد سقوط الأمطار ارتفع مستوى الماء

بنسبة  $5\%$ .

1. كم أصبح ارتفاع الماء في السد بعد

الانخفاض؟

2. ماهو ارتفاع الماء بعد سقوط الأمطار؟



**الوضعية 06:**

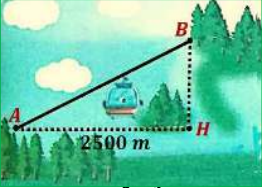
1. ينطلق مصعد هوائي من ارتفاع  $900 m$  ليصل ارتفاع  $1400 m$

(الشكل). ماهي المدة الزمنية (مقدرة بالدقائق والثواني) لصعود واحد،

إذا كانت سرعة المصعد الهوائي  $5,5 m/s$ ؟

2. ليكن  $x$  سعر التذكرة لشخص بالغ لرحلة

واحدة (ذهابا وإيابا).



أ. عبّر عن تكلفة الرحلة بدلالة  $x$  لعائلة

مكوّنة من شخصين بالغين و3 أطفال،

علما أن كل طفل يستفيد من تخفيض قدره  $40\%$  من قيمة  $x$ .

ب. ماهي أكبر قيمة لسعر التذكرة التي تسمح للعائلة بدفع ثمن الرحلة

في حدود المبلغ المخصص لذلك و المقدّر بـ  $2000 DA$ ؟



## تذكير:

## الدالة التآلفية:

تعريف:  $a$  و  $b$  عدنان.عندما نرفق بكل عدد  $x$  العدد  $ax + b$ . نقول إننا عرفنا دالة تآلفية. يسمى العدد  $ax + b$  صورة  $x$  بهذه الدالة.  $a$  و  $b$  هما معامل هذه الدالة.الترميز: يرمز لدالة تآلفية بإحدى الرموز  $f, g, h, \dots$ إذا كان  $ax + b$  هو صورة  $x$  بالدالة التآلفية  $f$ ، نكتب  $f: x \rightarrow ax + b$ ، نكتب أيضا  $f(x) = ax + b$ .مثال 01: الدالة  $f$  التي ترفق كل عدد  $x$  بضعفه مضافاً إليه العدد 3 هي دالة تآلفية نرسم لها بـ:  $f: x \rightarrow 2x + 3$  أو  $f(x) = 2x + 3$ 

## حالات خاصة:

- الدالة التآلفية ليست وضعية تناسبية (في الحالة  $b \neq 0$ ).
- في حالة  $b = 0$  تصبح الدالة التآلفية دالة خطية.
- إذا كان  $a = 0$  تسمى الدالة الثابتة.

تعين صورة عدد بدالة وتعين عدد إذا عُلِّمت صورته بدالة:

إذا كانت  $f$  دالة تآلفية معرفة كما يلي  $f(x) = ax + b$  فإنه يمكننا إيجاد صورة عدد بهذه الدالة (بالتعويض) أو إيجاد عدد علمت صورته بهذه الدالة كذلك (بحل معادلة من الدرجة الأولى).مثال 02: لتكن الدالة  $g$  المعرفة كما يلي:  $g(x) = 4x + 1$ 1. لتعين صورة 2 بهذه الدالة نعوض  $x = 2$  نجد:

$$g(2) = 4 \times 2 + 1 = 9$$

فصورة العدد 2 بالدالة  $g$  هي العدد 9.2. لإيجاد العدد الذي صورته 5 بالدالة  $g$  نعوض  $g(x) = 5$ 

$$4x + 1 = 5 \quad \text{وبالتالي: } 4x = 5 - 1$$

$$\text{أي: } 4x = 4 \quad \text{فإن: } x = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{ومنه: } x = 1$$

فالعقد الذي صورته 5 بالدالة  $g$  هو العدد 1.

## قراءة تمثيل بياني لدالة تآلفية:

- لتعين صورة عدد بدالة، نقرأ ترتيب النقطة من التمثيل البياني التي فصلتها هذا العدد.
- لتعين عدد صورته معلومة  $n$  بدالة، نقرأ فاصلة النقطة من التمثيل البياني التي ترتيبها  $n$ .

مثال 03: المستقيم  $(D)$  يمثل بيان دالة تآلفية  $f$ . بقراءة بيانية:صورة 3 هي 4. إذن  $f(3) = 4$ .صورة -3 هي -2. إذن  $f(-3) = -2$ .

صورة 1,5 هو العدد الذي صورته 2,5.

$$f(1,5) = 2,5$$

## تناسبية التزايديات:

## خاصية:

دالة تآلفية حيث  $f(x) = ax + b$  مع  $a$  و  $b$  عدنان معلومان. من أجل كل عددين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $x_1 \neq x_2$  لدينا  $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ملاحظة: هذه الخاصية تعني أن تزايد  $f(x)$  و تزايد  $x$  متناسبان ومعامل التناسبية هو  $a$ . $a$  هو أيضا معامل توجيه المستقيم الذي يمثل الدالة  $f$ . يسمح معامل توجيه مستقيم بمعرفة منحى هذا المستقيم.

## مثال 04:

هي الدالة التآلفية حيث  $f(2) = 1$  و  $f(5) = 7$ 

$$f(x) = ax + b$$

لدينا:

$$a = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{7 - 1}{5 - 2} = \frac{6}{3} = 2$$

## تعين دالة تآلفية انطلاقاً من عددين وصورتهما:

لتعين دالة تآلفية معاملها  $a$  و  $b$  علماً أن  $f(x_1) = y_1$  و  $f(x_2) = y_2$  نحسب  $a$  باستعمال تناسبية التزايديات وبحل المعادلة  $f(x_1) = y_1$  و نجد المجهول  $b$ .مثال 05: عين الدالة التآلفية  $h$  حيث:  $h(1) = 3$  و  $h(-3) = -5$ 

$$a = \frac{h(1) - h(-3)}{1 - (-3)} = \frac{3 - (-5)}{1 + 3} = \frac{3 + 5}{4} = 2$$

معامل الدالة التآلفية  $h$  هي 2 ومنه  $h(x) = 2x + b$ لدينا:  $h(1) = 3$  وعليه:  $2(1) + b = 3$  أي:  $2 + b = 3$ وبالتالي:  $b = 3 - 2$  ومنه:  $b = 1$ إذن العبارة الجبرية لدالة  $h$  هي:  $h(x) = 2x + 1$ 

## التمثيل البياني لدالة خطية:

في معلم للمستوي، التمثيل البياني لدالة تآلفية هو  $f: x \rightarrow ax + b$  هو مستقيم.

## ملاحظات:

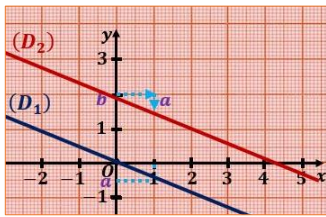
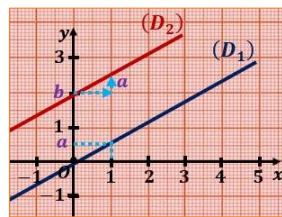
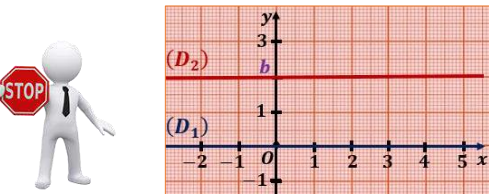
- لدينا  $f(0) = b$ ، العدد  $b$  يسمى الترتيب عند المبدأ للمستقيم  $(D)$  الممثل للدالة التآلفية  $f: x \rightarrow ax + b$ .
- النقطة  $M(x_0; y_0)$  تنتمي إلى المستقيم  $(D)$  معناه  $y_0 = ax + b$ .
- العلاقة  $y = ax + b$  تسمى معادلة المستقيم  $(D)$  و العدد  $a$  هو معامل توجيهه.

## مثال 06:

هي الدالة التآلفية حيث  $f(x) = -x + 2$  و  $(D)$  تمثيلها البياني في معلم. لإنشاء  $(D)$  يكفي تعيين النقطتين  $A$  و  $B$ .المستقيم  $(D)$  هو المستقيم  $(AB)$ .

$x$	0	3
$f(x)$	2	-1
النقطة	$A(0; 2)$	$B(3; -1)$

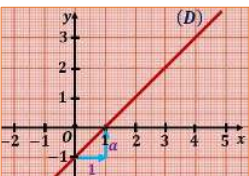
## الأوضاع النسبية للتمثيلين البيانيين لدالة تآلفية و الدالة الخطية المرفقة:

المستقيم  $(D_1)$  الذي يمثل الدالة التآلفية  $ax + b$  هو صورة المستقيم  $(D_2)$  الذي يمثل الدالة الخطية  $ax$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{u}(0; b)$  و  $(D_1)$  و  $(D_2)$  متوازيان.الحالة  $a < 0$ الحالة  $a > 0$ الحالة  $a = 0$ 

## تعين دالة تآلفية انطلاقاً من تمثيلها البياني:

مثال 07:  $(D)$  هو التمثيل البياني للدالة التآلفية  $f$  (الشكل المقابل).تعين  $f(x)$  صورة  $x$  بالدالة  $f$ : لدينا  $f(x) = ax + b$  حيث:العدد  $b$  هو الترتيب إلى المبدأ، (أو  $f(0) = b$ ) ومنه  $b = -1$ .العدد  $a$  هو معامل توجيه المستقيم  $(D)$ ،ومنه  $a = 1$  أي:  $f(x) = x - 1$ .

(يمكن قراءة العدد بيانياً كما هو موضح في الشكل، أو حسابه باستعمال نسبة التزايديات).



### تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانياً:

نعني بتفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانياً أن نرفق بهذه الجملة مستقيمين يمثلان الدالتين التآلفيتين المرفقتين بالجملة. الثانية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع هذين المستقيمين، عند وجودها، هي حل هذه الجملة.

### مثال 08:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

تعتبر الجملة:  $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$  لتفسير حل هذه الجملة بيانياً، نعبّر عن  $y$  بدلالة  $x$  في كلتا المعادلتين

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -2x \end{cases}$$
 ونجد:

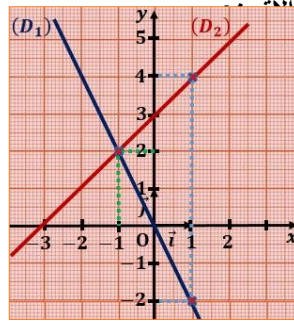
نسّمى  $(D_1)$  و  $(D_2)$  المستقيمين الممثلين للدالتين التآلفيتين:  $f(x) = -2x$  و  $g(x) = x + 3$  (الشكل المقابل).

في معلم متعامد و متجانس مبدؤه  $O$ .

لإنشاء  $(D_1)$  و  $(D_2)$  نستعين بالجدولين

$x$	0	1
$f(x)$	0	-2

$x$	0	1
$g(x)$	3	4



حل الجملة هو الثانية المشكلة من

إحداثيتي نقطة تقاطع  $(D_1)$  و  $(D_2)$ .

بقراءة بيانياً، نجد:  $(-1; 2)$

### تمارين - وضعيات

#### التمرين 01:

هل الدوال التالية دوال تآلفية؟ في حالة الإيجاب عيّن المعامل.

$$h: x \rightarrow x^2 + 1, \quad g: x \rightarrow 4x + \sqrt{3}, \quad f: x \rightarrow 2\pi x + 1$$

التمرين 02: هي الدالة التآلفية حيث  $f(x) = 1 - 2x$

1. عيّن معاملي الدالة  $f$ .

2. احسب  $f(0)$ ,  $f(-5)$ ,  $f(-1)$ .

3. احسب صورة كل عدد مما يلي:  $\sqrt{3}$ ,  $-4$ ,  $2$ .

4. عيّن العدد الذي صورته هي  $-3$  بالدالة  $f$ .

التمرين 03: مثل بيانياً الدوال التالية:

$$h: x \rightarrow -5 - x, \quad g: x \rightarrow -x + 2, \quad f: x \rightarrow 3x - 1$$

#### التمرين 04:

1. عين الدالة التآلفية  $f$  التي تمثيلها البياني يشمل النقطتين  $M(2; 5)$

$$N(-1; -4),$$

2. هل النقطة  $H(4; 11)$  تنتمي الى هذا التمثيل؟

3. اوجد العدد الذي صورته 5 بالدالة  $f$ .

4. اوجد صورة العدد  $-2$  بالدالة  $f$ .

التمرين 05: لتكن النقاط  $F(0; 3)$ ;  $M(1; 1)$ ;  $E(3; -3)$

1. اوجد الدالة التآلفية التي تمثيلها البياني هو المستقيم  $(EF)$ .

2. برهن أن النقاط  $E, F, M$  على استقامة واحدة.

التمرين 06: التمثيل البياني  $(T)$  لدالة تآلفية  $h$  يمر بالنقطتين

$$B(-1; 8) \text{ و } A(2; -3)$$

1. عيّن معامل توجيه المستقيم  $(T)$ .

2. عبّر عن  $h(x)$  بدلالة  $x$ .

التمرين 07: هي الدالة التآلفية حيث تمثيلها البياني هو مستقيم  $(P)$

معامل توجيهه 3.

• عبّر عن  $f(x)$  بدلالة  $x$  إذا علمت أن  $f(2) = 5$

التمرين 08: أنشئ المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  في المعلم المتعامد

و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  بحيث:

$$(D_1) \text{ معادلته: } y = -x + 1, \quad (D_2) \text{ معادلته: } y = 2x + 4$$

1. عيّن بيانياً إحداثيتي نقطة تقاطع  $(D_1)$  و  $(D_2)$ .

2. استنتج الحل البياني للجملة الآتية:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = -4 \end{cases}$$

التمرين 09: المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

• برهن أن النقط  $A(11; -17)$ ,  $B(0; 5)$  و  $C(-8; 21)$  على استقامة واحدة.

التمرين 10: حلّ جبرياً كلاً من الجملتين ثم تحقق بيانياً.

$$\begin{cases} 5x - 3y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - 7y = 4 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases}$$

التمرين 11: لتكن  $f$  الدالة التآلفية معرفة كما يلي:  $f(x) = 2x - 1$

1. احسب  $f(1)$ ;  $f(-1)$ .

2. هل النقطتان  $A(0; -1)$  و  $B(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2})$  تنتميان إلى التمثيل البياني لدالة  $f$ ؟

3. أنشئ المستقيم  $(\Delta)$  في معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

4. دالة خطية تمثيلها البياني يشمل النقطة  $B$ .

5. مثل بيانياً  $g$  في نفس المعلم  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

6. انطلاقاً من التمثيل البياني للدالة  $g$ , أعط العبارة الجبرية للدالة  $g$ .

#### التمرين 12: (BEM 2016)

$f$  دالة تآلفية تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  يشمل النقطتين  $A(2; 5)$  و  $B(-1; -4)$ .

1. بين أن العبارة الجبرية للدالة التآلفية  $f$  هي:  $f(x) = 3x - 1$

2. لتكن النقطة  $C(4; 11)$  من المستوي، هل النقط  $A, B, C$  على استقامة واحدة.

3. أوجد العدد الذي صورته 29 بالدالة  $f$ .

**الوضعية:** انطلقت دراجة نارية من القرية في اتجاه المدينة على الساعة

$8 \text{ h}$  بسرعة ثابتة قدرها  $30 \text{ km/h}$

وانطلقت سيارة من نفس القرية في اتجاه نفس المدينة على الساعة

$10 \text{ h}$  بسرعة ثابتة قدرها  $50 \text{ km/h}$

المسافة بين القرية و المدينة هي  $200 \text{ km}$ . بعد مدة  $t$  قطعت السيارة

المسافة  $f(t)$  و قطعت الدراجة النارية المسافة  $g(t)$ .



1. عبّر عن كل من  $f(t)$  و  $g(t)$  بدلالة  $t$ .

2. متى تلتحق السيارة بالدراجة النارية؟ حدّد عندئذ المسافة المقطوعة.

#### الوضعية الإدماجية 01:

يعرض نادي رياضي على زبائنه عرضين للدفع كالاتي:

**العرض الأول:** دفع  $100 \text{ DA}$  مقابل كل حصة.

**العرض الثاني:** دفع اشتراك شهري قدره  $400 \text{ DA}$  ثم دفع  $50 \text{ DA}$  مقابل كل حصة.

#### الجزء الأول:

1. يريد السيد أحمد المشاركة في 10 حصص في الشهر، كم سيدفع

حسب كل عرض.

2. ليكن  $x$  عدد الحصص في الشهر.

- عبّر بدلالة  $x$  عن  $y_1$  المبلغ المدفوع في العرض الأول و عن

$y_2$  المبلغ المدفوع في العرض الثاني.

#### الجزء الثاني:

1. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- ارسم المستقيمين  $(d_1)$  و  $(d_2)$  ممثلاً للدالتين  $f$  و  $g$  حيث:

$$f(x) = 100x \text{ و } g(x) = 50x + 400$$

( نأخذ:  $1 \text{ cm}$  على محور الفواصل يمثل حصة،  $1 \text{ cm}$  على محور

التراتب يمثل  $100 \text{ DA}$ ).

2. حل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} y = 100x \\ y = 50x + 400 \end{cases}$$

- ثم أعط تفسيراً بيانياً لهذا الحل.

3. اشرح من البيان للسيد أحمد العرض الأفضل بالنسبة إليه على حسب

عدد الحصص.

#### الوضعية الإدماجية 02:

تقدم إحدى الشركات المتخصصة في خدمات الانترنت العروض الآتية:

**العرض الأول:** كل  $1 \text{ MO}$  بـ  $2 \text{ DA}$

**العرض الثاني:** كل  $1 \text{ MO}$  بـ  $1 \text{ DA}$  مع اشتراك شهري بمبلغ غير

مسترجع قدره  $150 \text{ DA}$

## الجزء الأول:

1. أكمل الجدول التالي بحساب المبلغ اللازم حسب كل عرض موضعا مراحل الحساب:

السعة	تحميل شريط علمي سعته	تحميل سور قرآنية
العروض	100 MO	سعتها 250 MO
العرض 1		
العرض 2		

2. ليكن  $x$  ساعة الانترنت المستهلكة.  $y_1$  هو المبلغ حسب العرض الأول و  $y_2$  هو المبلغ حسب العرض الثاني. - عبر عن  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

## الجزء الثاني:

1. في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . مثل بيانيا الدالتين:  $f(x) = 2x$  و  $g(x) = x + 150$  ( نأخذ:  $1\text{ cm}$  على محور الفواصل يمثل  $50\text{ MO}$  ،  $1\text{ cm}$  على محور الترتيب يمثل  $50\text{ DA}$  ).  
2. حل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 150 \end{cases}$$

- أعط التفسير البياني لهذا لحل.  
3. بقراءة بيانية، ماهو العرض المناسب لتحميل شريط أناشيد سعته  $200\text{ MO}$

## الجزء الثالث:

خلال شهر رمضان الكريم أعلنت نفس الشركة لزيانها أنهم بإمكانهم الاستفادة من  $20\%$  ساعة انترنت إضافية مجاناً عند كل شراء. ما هي ساعة الانترنت الواجب شراؤها للحصول على ساعة قدرها  $4800\text{ MO}$

## الوضعية الإدماجية 03: (BEM 2007)

تقتصر شركة لسيارات الأجرة التسعيريين التاليين:  
**التسعيرة الأولى:**  $15\text{ DA}$  للكيلومتر الواحد لغير المنخرطين.  
**التسعيرة الثانية:**  $12\text{ DA}$  للكيلومتر الواحد مع مشاركة شهرية قدرها  $900\text{ DA}$ .  
1) انقل الجدول على ورقة الإجابة ثم أكمله:

المسافة (km)	60		
التسعيرة الأولى (DA)			5100
التسعيرة الثانية (DA)		3060	

2) ليكن  $x$  هو عدد الكيلومترات للمسافات المقطوعة.



$y_1$  هو المبلغ حسب التسعيرة الأولى.  
 $y_2$  هو المبلغ حسب التسعيرة الثانية.  
أ. عبر عن  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .  
ب. حل المتراجحة:  $15x > 12x + 900$   
3) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
أ. مثل بيانيا الدالتين  $f$  و  $g$  حيث:

$f(x) = 15x$  و  $g(x) = 12x + 900$   
(  $1\text{ cm}$  على محور الفواصل يمثل  $50\text{ km}$  ،  $1\text{ cm}$  على محور الترتيب يمثل  $500\text{ DA}$  ).

ب. استعمل التمثيل البياني لتحديد أفضل تسعيرة مع الشرح.

## الوضعية الإدماجية 04: (BEM 2011)

تقتصر وكالة تجارية للاتصالات الهاتفية للتسديد الشهري الصيغ الثلاث الآتية:

**الصيغة (أ):** دفع 11 ديناراً للدقيقة .  
**الصيغة (ب):** دفع 600 ديناراً اشتراكاً و 5 دنائير للدقيقة.  
**الصيغة (ج):** دفع 1200 ديناراً اشتراكاً و 3 دنائير للدقيقة.

1) احسب تكلفة المكالمات التي مدتها 100 دقيقة في كل من الصيغ الثلاث.

2)  $y$  يمثل الكلفة بالدنانير،  $x$  يمثل المدة بالدقائق. اكتب  $y$  بدلالة  $x$  في كل من الصيغ الثلاث . وفي نفس المعلم، مثل

بيانيا الصيغ الثلاث واستنتج الفترة الزمنية التي تكون خلالها الصيغة (ب) أقل تكلفة. ( يمكنك اختيار المعلم بحيث  $1\text{ cm}$  تمثل 50 دقيقة على محور الفواصل و  $1\text{ cm}$  تمثل  $200\text{ DA}$  على محور الترتيب ).

## الوضعية الإدماجية 05: (BEM 2012)

يقترح مدير صحيفة يومية على زيانها صيغتين لاقتناء الجريدة.



**الصيغة الأولى:** ثمن الجريدة  $10\text{ DA}$ .

**الصيغة الثانية:** ثمن الجريدة  $8\text{ DA}$  مع اشتراك سنوي قدره  $500\text{ DA}$ .

1) انقل واتم الجدول :

عدد الجرائد المشتراة	50		
مبلغ الصيغة الأولى بـ DA		1000	
مبلغ الصيغة الثانية بـ DA			3300

2) ليكن  $x$  عدد الجرائد المشتراة.

نسيمي  $f(x)$  الثمن المدفوع بالصيغة الأولى و  $g(x)$  الثمن المدفوع بالصيغة الثانية .

- عبر عن  $f(x)$  و  $g(x)$  بدلالة  $x$ .

3) مثل بيانيا الدالتين  $f(x)$  و  $g(x)$  في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  حيث:

$2\text{ cm}$  على محور الفواصل يمثل 50 جريدة و  $2\text{ cm}$  على محور الترتيب يمثل  $500\text{ DA}$ .

4) حل المعادلة  $f(x) = g(x)$  وماذا يمثل الحل ؟

5) ماهي الصيغة الأفضل في الحالتين التاليين:

- عند اقتناء 150 جريدة.

- عند اقتناء 270 جريدة.

## الوضعية الإدماجية 06: (BEM 2013)

لإقامة حفل زفاف قررت عائلة كراء سيارة فاخرة فاتصل الأب محمد بثلاث وكالات فقدموا له عروضاً حسب المعطيات المقابلة:

### المعطيات:

**عرض الوكالة الأولى:** دفع مبلغ  $4000\text{ DA}$  لليوم الواحد.

**عرض الوكالة الثانية:** دفع مبلغ  $3000\text{ DA}$  لليوم الواحد يضاف إليه ضمان غير مسترجع قدره  $1000\text{ DA}$ .

**عرض الوكالة الثالثة:** دفع مبلغ  $16000\text{ DA}$  لمدة لا تتعدى أسبوعاً واحداً.

فاستند الأب محمد بابنه سمير الذي يدرس في السنة الرابعة متوسط لمساعدته في اختيار العرض الأنسب والأقل تكلفة.

لو كنت في مكان سمير ساعد الأب محمد في:

1) اختيار العرض الأنسب والأقل تكلفة لكرء سيارة لمدة 7 أيام .

2)  $x$  عدد الأيام التي يستغل فيها الأب محمد السيارة.

أ. عبر، بدلالة  $x$ ، عن العرض الأول بالدالة  $f(x)$  وعن العرض الثاني بالدالة  $g(x)$  وعن العرض الثالث بالدالة  $h(x)$ .

ب. مثل بيانيا في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  الدوال  $f$ ،  $g$  و  $h$ .

( حيث كل  $2\text{ cm}$  من محور الفواصل يمثل يوماً واحداً وكل  $1\text{ cm}$  من محور الترتيب يمثل  $2000\text{ DA}$  ).

3) اعتماداً على البيان املأ الجدول الآتي:

العروض	الأيام	اليوم الأول	اليوم الرابع	اليوم الخامس
العرض 1				
العرض 2				
العرض 3				

4) أ. حل المعادلات الآتية لإيجاد  $x$  عدد الأيام المستغلة من طرف الأب محمد:  $f(x) = g(x)$  ؛  $f(x) = h(x)$  ؛  $g(x) = h(x)$  ؛  
ب. ماذا يمثل حل كل معادلة؟

## الوضعية الإدماجية 07: (BEM 2014)

بمناسبة عيد الأضحى قدمت مؤسسة للهاتف النقال عرضين لمدة أسبوع للتواصل وتبادل التهاني بواسطة الرسائل القصيرة (SMS).



**العرض الأول:**  $3\text{ DA}$  للرسالة الواحدة.

**العرض الثاني:**  $1, 5\text{ DA}$  للرسالة الواحدة مع اقتطاع مبلغ جزافي قدره  $30\text{ DA}$  من الرصيد.

عدد الرسائل (SMS)	10		
المبلغ حسب العرض الأول بـ DA		45	
المبلغ حسب العرض الأول بـ DA			90

(1)  $x$  يعبر عدد الرسائل المرسلة.  
 $y_1$  هو المبلغ حسب العرض الأول و  $y_2$  هو المبلغ حسب العرض الثاني.  
 - عبر عن  $y_1$  و  $y_2$  بدلالة  $x$ .

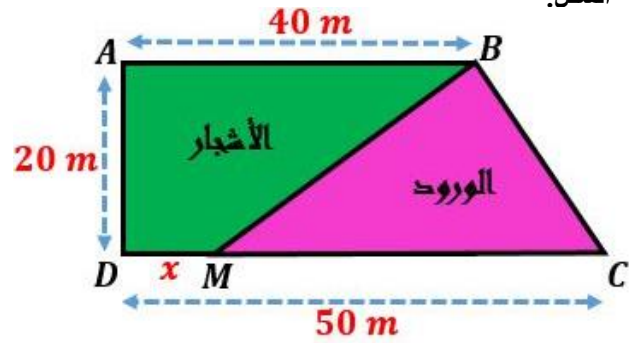
(2)  $f$  و  $g$  دالتان حيث:  
 $f(x) = 3x$  و  $g(x) = 1,5x + 30$   
 مثل بيانيا الدالتين  $f$  و  $g$  في نفس المعلم المتعامد و المتجانس حيث:  
 (1 cm) على محور الفواصل يمثل 5 رسائل SMS و 1 cm على محور الترتيب يمثل 10 DA).

(4) يريد الأخوان زينب و كريم استغلال هذين العرضين لهذه المناسبة، في رصيد كريم 120 DA ويريد تهنئة أكبر عدد من الأشخاص، أما زينب تريد تهنئة زميلاتها في الدراسة و عددن 15.  
 بقراءة بيانية، ما هو العرض المناسب لكل منهما؟ (مع الشرح)

**الوضعية الإدماجية 08: (BEM 2015)**

(I) لعمي أحمد قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها  $1000 m^2$ ، عرضها خمسي  $\left(\frac{2}{5}\right)$  طولها.  
 - أوجد بُعدي هذه القطعة.

(II) تنازل عمي أحمد لأخيه عن جزء من هذه القطعة مساحته  $100 m^2$  و خصص الجزء الباقي منها لاستغلاله مشتملة للورود والأشجار، لهذا الغرض قسّم هذا الجزء عشوائياً إلى قطعتين كما هو موضح في الشكل:



نضع  $DM = x$  (نقطة  $M$  من  $[DC]$  مع  $0 \leq x \leq 50$ ).  
 لتكن  $f(x)$  مساحة المثلث  $BCM$  و  $g(x)$  مساحة الرباعي  $ABMD$ .  
 (1) أ- عبر عن  $f(x)$  و  $g(x)$  بدلالة  $x$ .

ب- ساعد عمي أحمد لإيجاد الطول  $DM$  حتى تكون لقطعتي الأرض نفس المساحة.

(2) أ- في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  
 - مثل بيانيا الدالتين:

نأخذ:  $f(x) = 500 - 10x$  و  $g(x) = 10x + 400$

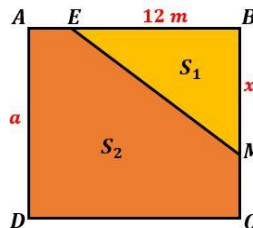
1 cm على محور الفواصل يمثل 2 m

1 cm على محور الترتيب يمثل  $50 m^2$

ب- فسّر بيانياً مساعدتك السابقة لعمي أحمد، مع تحديد قيمة المساحة في هذه الحالة.

**الوضعية الإدماجية 09: (BEM 2017)**

$ABCD$  قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها  $324 m^2$  ملك للأخوين أحمد وفاطمة و مجزأة حسب المخطط المقابل.



**الجزء الأول:**

(1) احسب  $a$  طول ضلع هذه القطعة.

(2) نقطة متحركة على الضلع  $[BC]$

حيث:  $BM = x$

$E$  نقطة من  $[BA]$  حيث:  $BE = 12 m$ .

الجزء  $EBM$  تملكه فاطمة و الجزء  $AEMCD$  يملكه أحمد.  
 أ. ليكن  $S_1$  مساحة الجزء  $EBM$  و  $S_2$  مساحة الجزء  $AEMCD$ .  
 - اكتب بدلالة  $x$  كلا من المساحتين  $S_1$  و  $S_2$ .  
 ب. ساعد الأخوين علي تحديد موضع النقطة  $M$  بحيث مساحة قطعة أحمد ضعف مساحة قطعة فاطمة.

**الجزء الثاني:**

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

(1) مثل بيانيا الدالتين  $f$  و  $g$  حيث:

$f(x) = 12x$  و  $g(x) = -6x + 324$

(نأخذ: 1 cm على محور الفواصل يمثل 2 m و 1 cm على محور

الترتيب يمثل  $36 m^2$ ).

(2) بقراءة بيانية فسّر مساعدتك السابقة للأخوين حول تحديد موضع النقط  $M$  مع إيجاد مساحة كل من القطعتين.

**الوضعية الإدماجية 10: (BEM 2018)**

عبد الله و محمد عاملان في مؤسسة لصناعة ألعاب الأطفال، راتبهما الشهري على النحو التالي:

**عبد الله راتبه:** 20000 DA إضافة إلى 200 DA لكل لعبة يتم صنعها.

**محمد راتبه:** 30000 DA إضافة إلى 100 DA لكل لعبة يتم صنعها.

**الجزء الأول:**

(1) ماهو الراتب الشهري الذي يتقاضاه كل منهما إذا تم صنع 120 لعبة؟

(2) ليكن  $x$  عدد اللعب المصنوعة في مدة شهر.

- عبر بدلالة  $x$  عن  $y_1$  راتب عبد الله و عن  $y_2$  راتب محمد.

**الجزء الثاني:**

(1) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

- ارسم المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_2)$  ممثلاً الدالتين  $g$  و  $h$  حيث:

$g(x) = 200x + 20000$  و  $h(x) = 100x + 30000$

(نأخذ: 1 cm على محور الفواصل يمثل 50 لعبة، 1 cm على محور

الترتيب يمثل 5000 DA).

(2) حل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} y = 200x + 20000 \\ y = 100x + 30000 \end{cases}$$

- ثم أعط تفسيراً بيانياً لهذا الحل.

- بقراءة بيانية متى يكون راتب عبد الله أكبر من راتب محمد؟

**الوضعية الإدماجية 11: (BEM 2019)**

يقترح مدير المسبح البلدي على السباحين التسعيرتين الآتيتين:

**التسعيرة الأولى:** 100 DA للحصة الواحدة لغير المنخرطين.

**التسعيرة الثانية:** 80 DA للحصة الواحدة مع اشتراك شهري قدره

400 DA.

1. ماهو عدد الحصص التي يمكنك الحصول عليها في كل تسعيرة إذا دفعت مبلغ 2800 DA؟

2. باعتبار:  $x$  عدد الحصص في الشهر وبالاستعانة بتمثيل بياني، أعط أفضل التسعيرتين حسب عدد الحصص خلال شهر واحد.

يمكنك أخذ: (1 cm على محور الفواصل يمثل 4 حصص، 1 cm على محور الترتيب يمثل 400 DA).



تذكير:

## مركبتا شعاع:

المستوي مزود بمعلم  $(O; I; J)$  مبدؤه النقطة  $O$ . إذا كانت  $M$  نقطة من المستوي إحداثياتها  $(x, y)$ ، فإن مركبتي الشعاع

$\overrightarrow{OM}$  هما  $x$  و  $y$  نكتب  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

أمثلة:

• إحداثيات النقطة  $M$  هما 4 و 3

نكتب  $M(4; 3)$ 

• مركبتا الشعاع  $\overrightarrow{OM}$  هما 4 و 3

نكتب  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ 

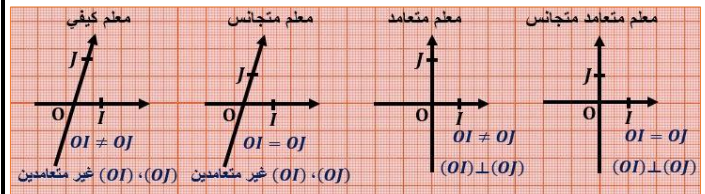
• إحداثيات النقطة  $N$  هما -3 و 2

نكتب  $N(-3; 2)$ 

• مركبتا الشعاع  $\overrightarrow{ON}$  هما -3 و 2

نكتب  $\overrightarrow{ON} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 

## أنواع المعلم:



## مركبتا شعاع علمت إحداثيات مبدئه ونهايته:

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; I; J)$  مبدؤه  $O$ .

القراءة في تمثيل بياني:

• لقراءة مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{AB}$ ، تنتقل من النقطة  $A$  بالتوازي مع المستقيم  $(OI)$  في الاتجاه الموجب (نحو اليمين) بـ 4 وحدات ثم تنتقل بالتوازي مع المستقيم  $(OJ)$  في الاتجاه الموجب (نحو الأعلى) بوحدة واحدة للوصول إلى النقطة  $B$ .

ونقرأ: مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  هما 4 و 2.

ونكتب:  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 

• لقراءة مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{MN}$ ، تنتقل من النقطة  $M$  بالتوازي مع المستقيم  $(OI)$  في الاتجاه السالب (نحو اليسار) بـ 3 وحدات ثم تنتقل بالتوازي مع المستقيم  $(OJ)$  في الاتجاه السالب (نحو الأسفل) بوحدة واحدة للوصول إلى النقطة  $N$ .

ونقرأ: مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{MN}$  هما -3 و -1. ونكتب:  $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

• تمثيل شعاع بمعرفة مركبتيه: لنمثّل شعاع بمعرفة مركبتيه نعين الإزاحتين الموافقتين لإشارتي المركبتين  $x$  و  $y$  لشعاع.

مثال:

•  $x > 0$  و  $y > 0$  يوافق إزاحة نحو اليمين متبوعة بإزاحة نحو الأعلى.  
•  $x < 0$  و  $y < 0$  يوافق إزاحة نحو اليسار متبوعة بإزاحة نحو الأسفل.  
•  $x > 0$  و  $y < 0$  يوافق إزاحة نحو اليمين متبوعة بإزاحة نحو الأسفل.  
•  $x < 0$  و  $y > 0$  يوافق إزاحة نحو اليسار متبوعة بإزاحة نحو الأعلى.

حساب مركبتي شعاع:

نقطة  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  نقطتان من مستو مزود بمعلم، فاصلة البداية

مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  هما  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$  ترتيب النهاية

ترتيب البداية  $B(1; 3)$ ؛  $A(-2; 4)$

مثال: حساب مركبتي  $\overrightarrow{AB}$ : لدينا:  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$  فإن:  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-2) \\ 3 - 4 \end{pmatrix}$

أي:  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 3 - 4 \end{pmatrix}$  ومنه:  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

نتيجة: في مستو منسوب إلى معلم مبدؤه  $O$ ، إذا كانت  $M$  نقطة إحداثياتها

$(x; y)$  فإن مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{OM}$  هما  $x$  و  $y$ . نكتب  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

ملاحظة: لتعيين ممثلاً للشعاع  $\overrightarrow{OM}$  يكفي تعليم النقطة  $M$ .

حساب الشعاعان المتساويان:

شعاعان  $\overrightarrow{U} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  و  $\overrightarrow{V} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$  شعاعان من مستوي مزود بمعلم.

معناه  $x = x'$  و  $y = y'$ .

حساب إحداثيتي منتصف قطعة:

$B$  و  $A$  نقطتان من مستو مزود بمعلم

بحيث  $A(x_A; y_A)$ ؛  $B(x_B; y_B)$ . إحداثيات  $M$  منتصف  $[AB]$  هما:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ و } y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

مثال:

$A(1; -2)$ ؛  $B(3; 0)$  نقطتان من المستوي.

$M$  منتصف القطعة  $[AB]$ .

إحداثيات النقطة  $M$  لدينا:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2 + 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

إذن:  $M(2; -1)$ .

ملاحظة: هناك حالات لحساب إحداثيتي منتصف قطعة منها مركز تناظر متوازي أضلاع ومركز دائرة المحيطة بمثلث قائم ونظيرة نقطة بالنسبة إلى نقطة.

حساب المسافة بين نقطتين في معلم متعامد ومتجانس:

في معلم متعامد ومتجانس، إذا كانت:  $A(x_A; y_A)$  و  $B(x_B; y_B)$  فإن المسافة بين النقطتين  $A$  و  $B$  هي

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

مثال:  $A(3; -1)$ ؛  $B(0; 2)$  نقطتان من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس، لدينا:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (2 - (-1))^2}$$

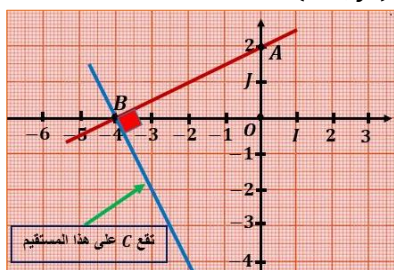
$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2}$$

$$AB = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

إذا كان:  $OI = OJ = 1$ ، فإن:  $AB = 3\sqrt{2}$

حساب مسافات: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس، مبدؤه  $O$ . (الوحدة 1 cm)

$A(0; 2)$ ،  $B(-4; 0)$ ،  $C(-2; y)$  ثلاث نقط.



• تعيين  $y$  حتى يكون المستقيمان  $(AB)$  و  $(BC)$  متعامدين

يكون المستقيمان  $(AB)$  و  $(BC)$  متعامدين إذا كان المثلث  $ABC$  قائم في  $B$ .

أي نعين  $y$  بحيث يكون:  $AB^2 + BC^2 = AC^2$ .

لدينا:  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ،  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ y - 2 \end{pmatrix}$ ،  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 2 \\ y \end{pmatrix}$

إذن:  $BC^2 = 4 + y^2$ ،  $AC^2 = 4 + (y - 2)^2$ ،  $AB^2 = 20$

بما أن  $AB^2 + BC^2 = AC^2$  وبالتعويض نجد:

$20 + 4 + y^2 = 4 + (y - 2)^2$  ومنه ينتج  $y = -4$ .

التمرين 01: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه النقطة  $O$ .

(الوحدة 1 cm)

1. علم نقطتان حيث  $A(1; 3)$  و  $B(-2; -3)$  علم النقطتين  $A$  و  $B$ .

2. عين النقط  $C, D, E, F$  بحيث:

• نظير  $A$  بالنسبة لـ  $O$ .

• نظير  $B$  بالنسبة لمحور الترتيب.

• نظير  $D$  بالنسبة لمحور الترتيب.

•  $\overrightarrow{FB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

التمرين 02: المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس مبدؤه النقطة  $O$ .

(الوحدة 1 cm)

1. علم النقط:  $A(-2; -5)$  ;  $B(5; -3)$  ;  $C(3; 4)$ .

2. احسب الأطوال:  $AB$  ;  $BC$  ;  $AC$ .

3. عين مركبتي كل شعاع من الأشعة  $\overrightarrow{AB}$  ;  $\overrightarrow{BC}$  ;  $\overrightarrow{AC}$ .

4. بين أن المثلث  $ABC$  قائم في  $B$ .

5. اوجد إحداثيتي النقطة  $K$  مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .

التمرين 03:

في معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  وحدة الطول هي السنتيمتر.

علم النقط:  $A(1; -1)$  ;  $B(3; 1)$  ;  $C(-3; 3)$ .

1. احسب مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  ثم الطول  $AB$ .

2. اوجد إحداثيتي النقطة  $E$  منتصف  $[BC]$ .

3. اوجد إحداثيتي النقطة  $D$  حتى يكون  $ABCD$  متوازي أضلاع.

التمرين 04:

في معلم متعامد ومتجانس  $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$  بحيث  $OI = OJ = 1 \text{ cm}$

1. علم النقط:  $A(-4; 2)$  ;  $B(5; 0)$  ;  $C(4; 4)$ .

2. بين نوع المثلث  $ABC$ .

3. أنشئ النقطة  $M$  بحيث  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

4. ما نوع الرباعي  $ACBM$ ؟

5. احسب إحداثيتي  $M$ .

6. احسب مساحة الرباعي  $ACBM$ .

7. أنشئ النقطة  $N$  صورة  $C$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  ثم احسب

إحداثيتي  $N$ .

8. احسب مساحة الرباعي  $ACNM$ .

التمرين 05: (BEM 2010)

المعلم متعامد ومتجانس للمستوي.

علم النقط:  $A(0; 2)$  ;  $B(1; 0)$  ;  $C(-1; 0)$ .

1. نوع المثلث  $ABC$ ؟ علل.

2. عين إحداثيتي النقطة  $D$  صورة النقطة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $O$

وزاويته  $180^\circ$  ثم استنتج نوع الرباعي  $ABDC$ .

التمرين 06: (BEM 2011)

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. علم النقط:  $A(-1; 2)$  ;  $B(3; 2)$  ;  $M(1; -1)$ .

2. بين أن  $B$  هي صورة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $M$  وزاويته  $\widehat{AMB}$ .

التمرين 07: (BEM 2012)

المعلم متعامد ومتجانس للمستوي.

1. علم النقط:  $A(2; -1)$  ;  $B(-2; 3)$  ;  $C(-4; -3)$ .

2. احسب الطول  $AC$  و استنتج نوع المثلث  $ABC$  علماً أن

$$BC = 2\sqrt{10}$$

3. احسب إحداثيتي النقطة  $D$  حتى يكون  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$

4. بين أن  $(AB) \perp (CD)$ .

التمرين 08: (BEM 2013)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. علم النقط:  $A(2; 0)$  ;  $B(-4; 3)$  ;  $C(5; 3)$ .

2. احسب مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  ثم الطول  $AB$ .

3. عين النقطة  $D$  صورة النقطة  $C$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{AB}$  ثم

احسب إحداثيتي النقطة  $D$ .

4. اوجد إحداثيتي  $M$  نقطة تقاطع المستقيمين  $(AD)$  و  $(BC)$ .

التمرين 09: (BEM 2014)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. علم النقط:  $A(-2; -3)$  ;  $B(4; 1)$  ;  $C(2; 4)$ .

2. أ. أعط القيمة المضبوطة للطول  $AB$ .

ب. علماً أن:  $AC = \sqrt{65}$  و  $BC = \sqrt{13}$ ، بين أن المثلث  $ABC$  قائم.

3. أنشئ النقطة  $E$  صورة النقطة  $A$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overrightarrow{BC}$ .

أثبت أن  $ABCE$  مستطيل.

التمرين 10: (BEM 2017)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. علم النقط:  $A(0; 4)$  ;  $B(-3; 1)$  ;  $C(5; -1)$ .

2. احسب إحداثيتي النقطة  $E$  منتصف  $[BC]$ .

3. أنشئ النقطة  $D$  صورة النقطة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $E$  وزاويته

$180^\circ$  ثم استنتج إحداثيتي  $D$ .

4. بين طبيعة الرباعي  $ABCD$  مستطيل.

التمرين 11: (BEM 2019)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. علم النقط:  $A(-1; 5)$  ;  $B(2; 2)$  ;  $C(-1; -1)$ .

2. احسب الطولين  $AB$  و  $BC$ .

3.  $F$  منتصف  $[AC]$ ، عين النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالدوران الذي

مركزه  $F$  وزاويته  $180^\circ$ . استنتج من الشكل إحداثيتي النقطة  $D$ .

4. بين طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

الوضعية 01:

يملك مستثمر قطعة أرض مستطيلة الشكل خصصها لتربية الدواجن حيث أن النقط  $A, B, C, D$  حدود القطعة الأرضية.

1. علم على مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  النقط:

$A(0; 2)$  ;  $B(4; 2)$  ;  $C(4; -1)$  ;  $D(0; -1)$  ;  $E(1; 5; 2)$

2. يريد المستثمر إنشاء باب في منتصف الجدار  $[DE]$ .

- ساعده في تحديد إحداثيات النقطة موقع الباب.

3. بداخل المدجنة أراد المستثمر وضع حنفية في نقطة  $G$  بحيث

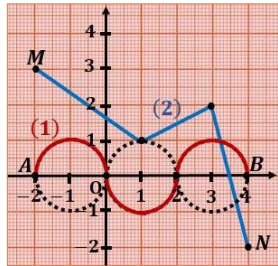
$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AE}$$

- جد إحداثيات النقطة  $G$ .

الوضعية 02:

يتدرب عداءان استعداداً لمنافسة دولية على مسارين مُمتلئين بالمنحنيين (1) و (2) في الشكل المقابل.

• حدّد أقصر المسارين (1) و (2).



بالتوفيق والنجاح



الإجتاهاد هو لب و  
جوهره و سر النجاح



مدى هذه السلسلة:  $80 - 50 = 30$

الفئة الوسيطة: مجموع التكرارات هو 20 إذن الوسيط هو نصف مجموع القيمتين المركزيتين التي ترتبهما  $10 = \frac{20}{2}$  و  $11 = \frac{20}{2} + 1$  ( ننظر إلى التكرار المجمع الصاعد ) كلاهما تنتمي إلى الفئة  $50 \leq P < 60$  وهي الفئة الوسيطة.

### ملاحظات:

- إذا رمزنا للميزة المدروسة بالرمز  $X$ ، فإن الوسط الحسابي لهذه الميزة، يرمز له بالرمز:  $\bar{X}$ .
- يمكن كتابة الفئة  $10 \leq X < 20$  بشكل آخر  $[10; 20[$ .

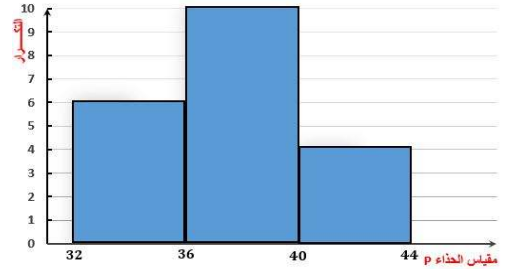
### تمثيل معطيات إحصائية:

#### مثال 01:

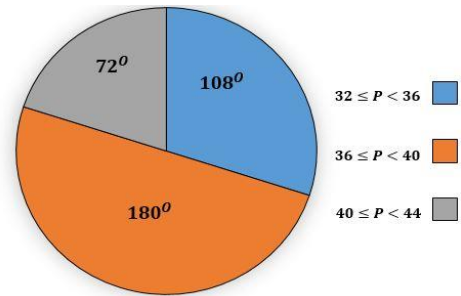
أخذ بائع للأحذية 20 زوج حذاء، فكانت مقاسات الأحذية كالتالي:

قياس الحذاء P	$32 \leq P < 36$	$36 \leq P < 40$	$40 \leq P < 44$
التكرار	6	10	4
النسبة المئوية %	$\frac{6 \times 100}{20} = 30\%$	$\frac{10 \times 100}{20} = 50\%$	$\frac{4 \times 100}{20} = 20\%$
قياس الزاوية في مخطط دائري	$\frac{6 \times 360^\circ}{20} = 108^\circ$	$\frac{10 \times 360^\circ}{20} = 180^\circ$	$\frac{4 \times 360^\circ}{20} = 72^\circ$
قياس الزاوية في مخطط نصف دائري	$\frac{6 \times 180^\circ}{20} = 54^\circ$	$\frac{10 \times 180^\circ}{20} = 90^\circ$	$\frac{4 \times 180^\circ}{20} = 36^\circ$

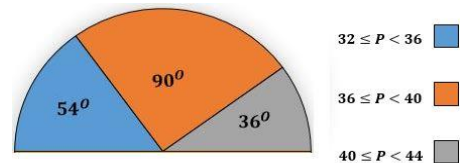
### 1. تمثيل هذه المعطيات بمدرج تكراري:



### 2. تمثيل هذه المعطيات بمخطط دائري:



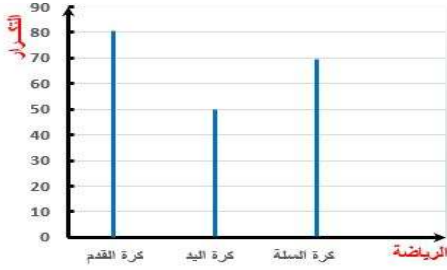
### 3. تمثيل هذه المعطيات بمخطط نصف دائري:



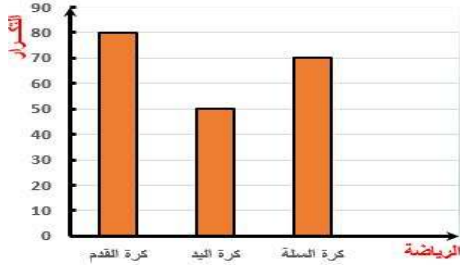
مثال 02: الجدول التالي يبين الرياضات التي تمارس في أقسام السنة الرابعة من متوسطة، علما أن كل تلميذ يمارس رياضة واحدة.

م	كرة السلة	كرة اليد	كرة القدم	الرياضة
200	70	50	80	التكرار
100%	$\frac{70 \times 100}{200} = 35\%$	$\frac{50 \times 100}{200} = 25\%$	$\frac{80 \times 100}{200} = 40\%$	النسبة المئوية %

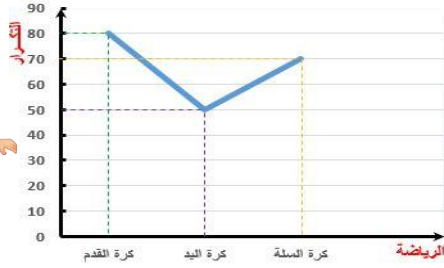
### 1. تمثيل هذه المعطيات بمخطط أعمدة:



### 2. تمثيل هذه المعطيات بمخطط مستطيلات:



### 3. تمثيل هذه المعطيات بمنحنى بياني:



## تمارين - وضعيات

### التمرين 01:

إليك السلسلة الإحصائية التالية:

2، 10، 5، 6، 6، 9، 8، 7، 2، 4، 2، 3، 2، 1

1. ماهو تكرار القيم الأكبر تماما من القيمة 6؟
2. ماهو تكرار القيم الأصغر من 5 أو تساويها؟
3. أعط الجدول الممثل للتكرارات والتكرارات المجمع الصاعدة والتكرارات النسبية المجمع الصاعدة.
4. احسب مدى، وسيط ومتوسط هذه السلسلة.
5. عين منوال هذه السلسلة (هو القيمة التي توافق أكبر تكرار).

### التمرين 02:

إليك السلسلة الإحصائية التالية:

13، 12، 11، 10، 9، 8، 7، 5، 4، 3، 1

1. احسب متوسط هذه السلسلة.
2. اوجد الوسيط لهذه السلسلة.
3. قارن بين المتوسط لهذه السلسلة ووسيطها، ماذا تستنتج؟

### التمرين 03:

السلسلة الإحصائية الموالية مرتبة ترتيبا تصاعديا:

$Y, 8, 8, 6, 6, 5, 4, X$  إذا علمت أن متوسط هذه السلسلة هو 6 و مداها هو 5.

- احسب العددين  $X$  و  $Y$ .

### التمرين 04:

إليك السلسلة الإحصائية التالية:

5، 7، 2، 4، 6، 8، 3، 1

1. رتبها.
2. اوجد وسيطها.
3. هل الوسيط هو إحدى قيم السلسلة؟
4. هل الوسيط هو دائما قيمة من قيم السلسلة الإحصائية؟

### التمرين 05:

معدل سلسلة علامات قسم في اختبار هو 11,5 ووسيطها 11.

1. حددت أصغر علامة وهي 4 التي تحصل عليها تلميذ واحد و أكبر

### الوضعية 04:

إليك علامات أحد اختبارات مادة الرياضيات لقسم السنة الرابعة متوسط.

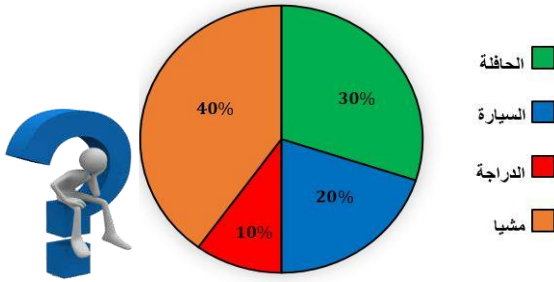
18	16	14	12	10	5	7	12
12	10	5	14	16	14	12	10
18	12	14	16	12	5	12	5

1. نظم هذه معطيات في الجدول.
2. ماهو عدد تلاميذ هذا القسم؟
3. احسب معدل القسم.
4. ماهي نسبة التلاميذ الذين نقاطهم تساوي أو تقل عن: 10، 14؟
5. ماهي نسبة التلاميذ الذين نقاطهم تساوي أو تفوق عن: 7، 12؟
6. اوجد النقطة الوسيطة لنقاط القسم.
7. احسب مدى نقاط القسم.
8. مثل معطيات الجدول بمخطط مستطيلات.



### الوضعية 05:

تم استجواب 200 تلميذ حول الوسيلة المستعملة للتنقل إلى المتوسطة. لخصت النتائج في المخطط التالي:



1. نظم معطيات المخطط في جدول يدرس الوسيلة المستعملة من طرف التلاميذ للتحاق بالمدرسة، ثم احسب تكراراتها النسبية لكل وسيلة يستقلها التلاميذ.
2. ماهي الوسيلة الأكثر استعمالاً؟
3. مثل هذه المعطيات بمنحنى بياني.

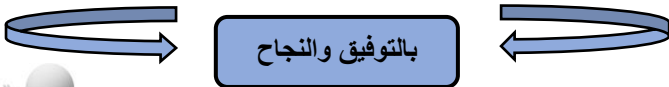
### الوضعية 06:

نصب رادار للدرك الوطني لمراقبة سرعة مجموعة من السيارات على الطريق السيار، الجدول التالي يبين سرعات 200 سيارة.

السرعة $V$ (km/h)	$[50; 80[$	$[80; 110[$	$[110; 140[$
عدد السيارات	110	60	30



1. ماذا نقصد بجدول متساوي المدى؟
2. احسب القيمة المتوسطة لسرعة السيارات.
3. عين الفئة الوسيطة لهذه السلسلة.
4. مثل معطيات الجدول بمخطط دائري.



علامة وهي 19 التي تحصل عليها كذلك تلميذ واحد.

- ماهو معدل العلامات ووسيطها بعد هذا الحذف؟
- 2. حذفت فقط أكبر علامة وهي 19 التي تحصل عليها تلميذ واحد و أصبح معدل العلامات 11, 25.
- ماهو عدد تلاميذ هذا القسم؟

### التمرين 06:

تمثل القائمة التالية الاستهلاك السنوي للكهرباء (MW) بمجموع سكني يضم 50 عائلة.

1,8	2	1,3	2,4	0,5	0,9	1,4	0,6	0,7	1
0,5	1,2	1,1	0,8	1,7	2,4	1	2,2	1,8	0,5
1,3	2,4	1,4	1,8	0,5	2	1,3	1,7	1,1	1,3
0,9	2,2	1,7	0,6	1,1	0,9	1,4	1,2	0,5	1,8
0,6	0,8	0,5	1,2	1,8	2	1,7	0,7	0,9	2,4

1. اجمع هذه المعطيات في فئات متساويات المدى الذي يساوي 0,5 وعين تكرارات هذه الفئات في جدول.
2. احسب المتوسط لهذه السلسلة الإحصائية.
3. عين الفئة الوسيطة لهذه السلسلة الإحصائية.



### الوضعية 01:

يبين الجدول التالي فصائل دم تلاميذ في قسم السنة الرابعة متوسط.

المجموع	A	B	AB	O
فصيلة الدم	12	5	9	4
التكرار				
التكرار النسبي				
النسبة المئوية لتكرار %				
قيس الزاوية في مخطط دائري				



1. انقل ثم اتمم هذا الجدول.
2. مثل معطيات الجدول بمخطط نصف دائري.

### الوضعية 02:

سجل الطبيب المدرسي في الجدول الآتي قامات تلاميذ قسم السنة الرابعة متوسط في فئات متساوية المدى:

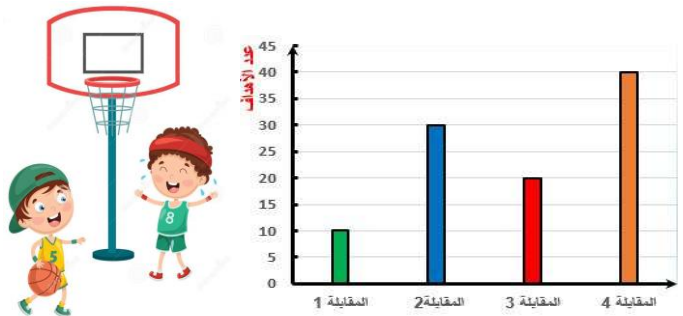
طول القامة (cm) T	$160 \leq T < 165$	$165 \leq T < 170$	$170 \leq T < 175$
عدد التلاميذ	15	10	7



1. احسب معدل أطوال القامات لهذا القسم.
2. ماهو عدد التلاميذ الذين تقل قاماتهم عن:  $175 \text{ cm}$ ،  $165 \text{ cm}$ ؟
3. ماهو عدد التلاميذ الذين تفوق قاماتهم عن:  $170 \text{ cm}$ ،  $160 \text{ cm}$ ؟
4. عين الفئة الوسيطة لهذه السلسلة الإحصائية.
5. عين الفئة المنوالية لهذه السلسلة الإحصائية (هي الفئة التي توافق أكبر تكرار).
6. مثل معطيات الجدول بمدرج تكراري.

### الوضعية 03:

يمثل مخطط الأعمدة التالي عدد الأهداف المسجلة لفريق كرة السلة.



1. نظم معطيات المخطط في جدول.
2. ماهو معدل الأهداف المسجلة؟
3. ماهي النسبة المئوية لعدد الأهداف المسجلة في المقابلة الثالثة؟

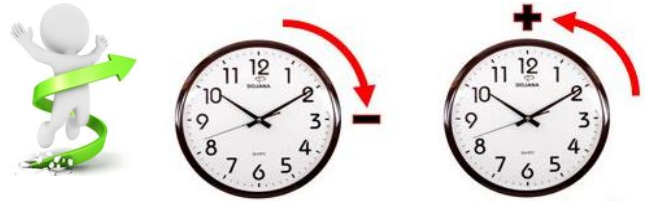
تذكير:

الدوران:

**تعريف:** تحويل شكل بالدوران هو تدويره بزاوية معينة حول نقطة ثابتة وفي اتجاه معين.

**ملاحظة:** يتميز الدوران بزاوية واتجاه ومركز هو النقطة التي دورنا حولها. **اصطلاح:** يُسمى الاتجاه المعاكس لاتجاه عقارب الساعة **الاتجاه المباشر** أو **الاتجاه الموجب**.

كما يُسمى الاتجاه الآخر **الاتجاه غير المباشر** أو **الاتجاه السالب**.



الاتجاه غير المباشر

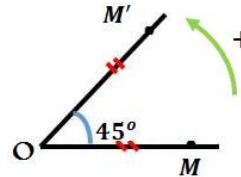
الاتجاه المباشر

**ملاحظة:** نأخذ، عامة، الاتجاه الموجب كاتجاه للدوران مالم يذكر عكس ذلك. **صورة نقطة بدوران علم مركزه وقيس زاويته:**

$O$  نقطة معلومة و  $\alpha$  زاوية.

صورة نقطة  $M$  تختلف عن  $O$  بالدوران الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\alpha$  في اتجاه معين هي النقطة  $M'$  حيث:  $OM = OM'$  و  $\widehat{MOM'} = \alpha$ .

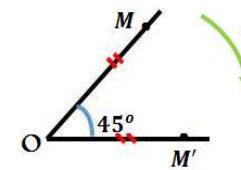
مثال 01:



النقطة  $M'$  هي صورة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $O$ ، وزاويته  $45^\circ$ ، واتجاهه هو **الاتجاه الموجب**.

$$OM = OM' \text{ و } \widehat{MOM'} = 45^\circ$$

مثال 02:



النقطة  $M'$  هي صورة  $M$  بالدوران الذي مركزه  $O$ ، وزاويته  $45^\circ$ ، واتجاهه هو **الاتجاه السالب**.

$$OM = OM' \text{ و } \widehat{MOM'} = 45^\circ$$

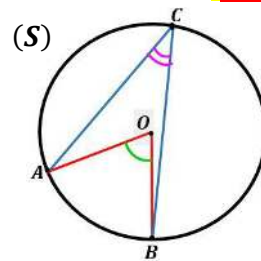
حالة خاصة:

الدوران ذو المركز  $O$  والزاوية  $180^\circ$  هو تناظر مركزي مركزه  $O$ .

**صورة شكل بدوران - خواص الدوران:**

- لإنشاء صورة شكل بدوران، ننشئ صورة كل نقطة من نقاطه.
- الدوران يحافظ على طبيعة الأشكال أي أن صورة شكل بدوران هي شكل يطابقه وله نفس الخصائص.
- الدوران يحافظ على المسافات وعلى استقامة النقط وعلى أقياس الزوايا.

**الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في دائرة:**



لتكن (S) الدائرة ذات المركز  $O$ .

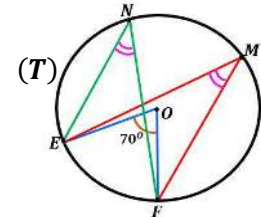
نقول عن الزاوية  $\widehat{ACB}$  أنها زاوية محيطية في الدائرة (S)، إذا كان رأسها  $C$  ينتمي إلى الدائرة (S) و  $[CB]$  و  $[CA]$  وترها لهذه الدائرة.

نقول عن الزاوية أنها مركزية في الدائرة (S)، إذا كان رأسها هو مركز هذه الدائرة.

**خاصية 01:** قيس زاوية محيطية في دائرة (S) هو نصف قيس الزاوية المركزية التي تحصر نفس القوس معها.  $\widehat{ACB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}$

**خاصية 02:** كل الزوايا المحيطية في دائرة التي تحصر نفس القوس متقايسة.

مثال:



الزاويتان  $\widehat{ENF}$  و  $\widehat{EMF}$  محيطيتان تحصران نفس القوس  $\widehat{EF}$ ، أما

الزاوية  $\widehat{EOF}$  مركزية، فإن:

$$\widehat{ENF} = \widehat{EMF} = \frac{\widehat{EOF}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ$$

المضلع المنتظم:

نقول عن مضلع أنه منتظم، إذا كانت كل زواياه متقايسة وكل أضلاعه لها نفس الطول.

**خاصية 01:** توجد دائرة تشمل كل رؤوس المضلع.

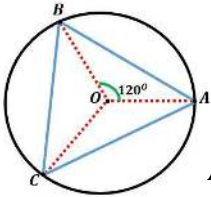
• نقول عن هذه الدائرة أنها دائرة محيطية بالمضلع المنتظم.

• مركز هذه الدائرة هو مركز المضلع المنتظم.

**خاصية 02:** يبقى المضلع المنتظم ثابتا، بالدوران الذي مركزه  $O$  مركز المضلع، والذي زاويته  $\widehat{AOB}$  (في أي اتجاه كان)، حيث  $A$  و  $B$  هما رأسان متتاليان للمضلع المنتظم.

**خاصية 03:** الزوايا المركزية في مضلع منتظم متقايسة، وقيس كل واحدة منها  $\frac{360^\circ}{n}$  حيث  $n$  هو عدد أضلاع هذا المضلع المنتظم.

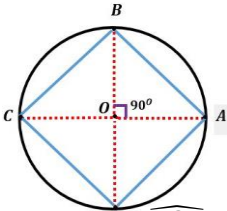
مثال 01:



المثلث متقاييس الأضلاع:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

مثال 02:



المربع:

$$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

إنشاء مضلع منتظم علم طول ضلعه:

انطلاقا من القطعة المستقيمة  $[AB]$  حيث  $AB = 3 \text{ cm}$ ، أنشئ الخماسي المنتظم  $ABCDE$  الذي مركزه  $O$  وضلعه  $[AB]$ .

**الطريقة:** ننشئ القطعة  $[AB]$  بحيث:  $AB = 3 \text{ cm}$

ننشئ محور القطعة  $[AB]$  و نصف المستقيم  $[AX]$

بحيث  $\widehat{BAX} = 54^\circ$  لأن: قيس الزاوية

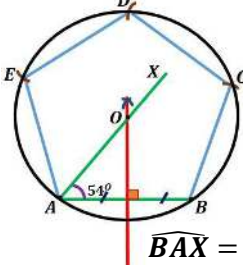
المركزية في خماسي منتظم هو:

$$\widehat{AOB} = \dots = \widehat{EOA} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

وبما أن  $\widehat{BAX}$  هي زاوية القاعدية في

المثلث المتقاييس الساقين  $AOB$ ، فإنه:

$$\widehat{BAX} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$



نسمي  $O$  نقطة تقاطع محور القطعة  $[AB]$  و  $[AX]$  هي مركز الخماسي المنتظم. نرسم الدائرة ذات المركز  $O$  ونصف القطر  $OA$ .

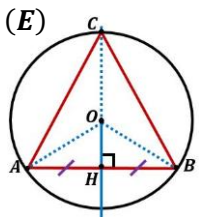
نستعمل المدور لإنشاء الرؤوس الأخرى  $C, D, E$  بحيث يكون:

$$EA = DE = CD = BC = AB = \text{نصل بين النقاط } A, B, C, D, E$$

فنحصل على الخماسي المنتظم  $ABCDE$  الذي ضلعه  $[AB]$ .

**حساب طول ضلع مضلع منتظم علم نصف قطر الدائرة المحيطة به:**

$ABC$  مثلث متقاييس الأضلاع و (E) الدائرة المحيطة به، مركزها  $O$  و نصف قطرها  $\sqrt{3}$ . الوحدة هي السنتيمتر.



• حساب القيمة المضبوطة لطول ضلع هذا المثلث.

في المثلث  $ABC$ ، الارتفاع  $(OH)$  هو أيضا منصف

الزاوية  $\widehat{AOB}$  و محور القطعة  $[AB]$ .

$$\text{لدينا: } \widehat{ACB} = 60^\circ \text{ إذن: } \widehat{AOB} = 120^\circ$$

$$\text{ومنه: } \widehat{HOA} = 60^\circ$$

في المثلث  $OAH$  القائم في  $H$ ، لدينا  $\widehat{OAH} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\text{لدينا: } \cos \widehat{OAH} = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{\sqrt{3}} \text{ أي: } \cos 30^\circ = \frac{AH}{\sqrt{3}}$$

$$AH = \sqrt{3} \times \cos 30^\circ \text{ ونستنتج أن: } AH = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{لدينا: } AB = 2 \times AH = 3 \text{ إذن: } AB = 3 \text{ cm}$$

**التمرين 01:** أنشئ نقطتان  $A$  و  $B$  من المستوي.

1. أنشئ النقطة  $E$  صورة النقطة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $30^\circ$  واتجاهه غير مباشر.
2. أنشئ النقطة  $F$  صورة النقطة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $60^\circ$ . ما طبيعة المثلث  $AEF$ ؟

**التمرين 02:**

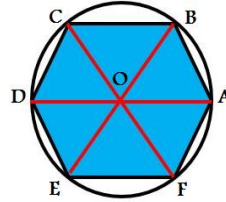
- $ABC$  مثلث قائم في  $A$  ومتساوي الساقين بحيث:  $AB = 4 \text{ cm}$ .
1. ماهي صورة النقطة  $C$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $90^\circ$  (عكس عقارب الساعة)؟
  2. أنشئ النقطة  $E$  صورة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $45^\circ$  باتجاه عقارب الساعة دون استخدام المنقلة.

**التمرين 03:**

- ليكن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  بحيث:  $AB = 3 \text{ cm}$  و  $AC = 4 \text{ cm}$ .
1. أنشئ المثلث  $AB'C'$  صورة المثلث  $ABC$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وزاويته  $180^\circ$ .
  2. أنشئ الدائرة  $(M)$  المحيط بالمثلث  $ABC$ .
  3. أنشئ الدائرة  $(M')$  صورة الدائرة  $(M)$  بدوران الذي مركزه  $C$  وزاويته  $90^\circ$  في الاتجاه السالب.

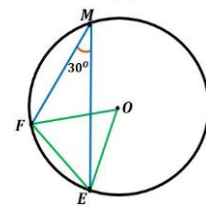
**التمرين 04:**  $ABCDEF$  سداسي منتظم مركزه  $O$ .

- ماهي صورة المثلث  $OAB$  :-
1. التناظر المحوري بالنسبة إلى  $(DA)$ .
  2. التناظر المركزي ذي المركز  $O$ .
  3. الدوران ذي المركز  $B$ ، والزاوية  $60^\circ$  في الاتجاه السالب.



**التمرين 05:**

- لتكن الدائرة ذات المركز  $O$  ولتكن  $E, F, M$  نقاطا من هذه الدائرة بحيث:



- $\widehat{FME} = 30^\circ$ .

**التمرين 06:**  $(BEM 2009)$

- $[AB]$  قطعة مستقيم طولها  $6 \text{ cm}$ .
1. أنشئ النقطة  $C$  صورة النقطة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $A$  وقيس زاويته  $90^\circ$  في اتجاه عكس عقارب الساعة.
  2. ما نوع المثلث  $ABC$ ؟ (بزر إجابتك)
  3. اوجد الطول  $BC$ .



**التمرين 07:**  $(BEM 2010)$

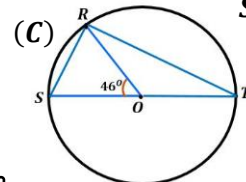
- $(O; \vec{i}; \vec{j})$  معلم متعامد ومتجانس للمستوي.
1. عَلمَ النقط:  $A(0; 2)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(-1; 0)$ .
  2. ما نوع المثلث  $ABC$ ؟ عَلمَ.
  3. عين إحداثيات النقطة  $D$  صورة النقطة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $O$  و زاويته  $180^\circ$ ، ثم استنتج نوع الرباعي  $ABDC$ .

**التمرين 08:**  $(BEM 2011)$

- المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .
1. عَلمَ النقط:  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $M(1; -1)$ .
  2. بين أن  $B$  هي صورة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $M$  وزاويته  $\widehat{AMB}$ .

**التمرين 09:**  $(BEM 2015)$

- في الشكل المقابل الأطوال وأقياس الزوايا غير حقيقية.
- $(C)$  دائرة مركزها  $O$  وقطرها  $ST = 9 \text{ cm}$ .
- $R$  نقطة من هذه الدائرة حيث  $\widehat{SOR} = 46^\circ$ .
1. بين أن:  $\widehat{STR} = 23^\circ$ .
  2. المثلث  $SRT$  قائم في  $R$ ، عَلمَ.
  3. احسب  $RS$  بالتدوير إلى  $0, 01$ .



**التمرين 10:**  $(BEM 2017)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. عَلمَ النقط:  $A(0; 4)$ ,  $B(-3; 1)$ ,  $C(5; -1)$ .
2. احسب إحداثيات النقطة  $E$  منتصف القطعة  $[BC]$ .
3. أنشئ النقطة  $D$  صورة  $A$  بالدوران الذي مركزه  $E$  وزاويته  $180^\circ$ ، ثم استنتج إحداثيات  $D$ .
4. بين أن الرباعي  $ABDC$  مستطيل.



**التمرين 11:**  $(BEM 2019)$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1. عَلمَ النقط:  $A(-1; 5)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(-1; -1)$ .
2. احسب الطولين  $AB$  و  $BC$ .
3.  $F$  منتصف  $[AC]$ ، عين النقطة  $D$  صورة النقطة  $B$  بالدوران الذي مركزه  $F$  وزاويته  $180^\circ$ .
4. استنتج من الشكل إحداثيات النقطة  $D$ .
4. بين طبيعة الرباعي  $ABCD$ .

**الوضعية 01:**

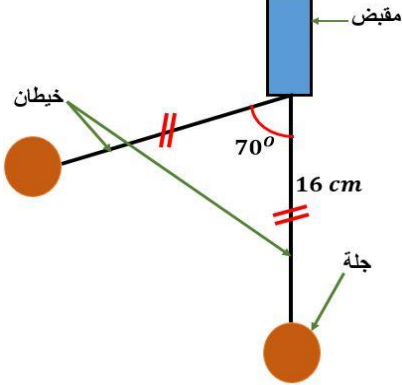
يخرج إبراهيم يوميا من بيته على الساعة السابعة والنصف قاصدا المتوسطة، وفي الطريق نظر إلى ساعته فوجد أنه مشي ربع ساعة، فتساءل كم هي الزاوية التي دار بها عقرب الدقائق؟

• ساعده في معرفة زاوية الدوران و استنتج اتجاهه.



**الوضعية 02:**

صنع عمي أحمد النجار جلتين من الخشب، ليصنع ابنه لعبة مستعملا خيطا كما في الشكل التالي:



- بعد الانتهاء من الصنع أخذ يلعب بها ماسكا المقبض و حركه مرة واحدة فابتعدت الجلتين عن بعضها بزاوية قدرها  $70^\circ$ .
1. ما طبيعة التحويل الناتج؟
  2. اذكر مميزاته وخواصه؟

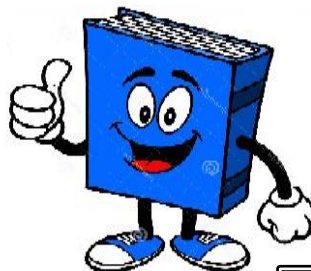
**الوضعية 03:**

أراد يوسف إنجاز مخطط لقاعدة المسبح شكله سداسي منتظم كما في الشكل المقابل:



- ساعده في إنجاز الشكل بحيث طول ضلعه في الواقع  $3 \text{ m}$  و طوله في المخطط  $3 \text{ cm}$ .

بالتوفيق والنجاح



تذكير:

## ❖ الكرة والجلّة:

$O$  نقطة من الفضاء و  $R$  عدد موجب تماما.

• الكرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها  $R$  هي مجموعة

من النقطة  $M$  من الفضاء بحيث:  $OM = R$ .

• الجلّة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها  $R$  هي مجموعة

من النقطة  $M$  من الفضاء بحيث:  $OM \leq R$ .

الدوائر الكبرى

## ❖ مساحة الكرة وحجم الجلّة:

• مساحة الكرة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها  $R$  هي  $A = 4\pi R^2$  حيث

• حجم الجلّة التي مركزها  $O$  ونصف قطرها  $R$  هو  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  حيث

**مثال 01:** حساب بدلالة  $\pi$  مساحة كرة نصف قطرها  $5 \text{ cm}$ :

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi(5)^2 = 100\pi \text{ cm}^2$$

**مثال 02:** حساب بدلالة  $\pi$  حجم جلّة نصف قطرها  $3 \text{ cm}$ :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = 36\pi \text{ cm}^3$$

## ملاحظات:

• لا تنس مراعاة الوحدات للمساحة والحجم.

• تولّد الكرة من دوران دائرة حول أحد أقطارها.

## ❖ المقاطع المستوية لمجسمات مالوفة:

## 1. مقطع كرة بمستوي:

• **الحالة 01:**  $OH = R$   
مقطع الكرة بالمستوي  $(P)$  هو النقطة  $H$ .

نسمي المستوي  $(P)$ : مستويا مماسا للكرة. نسمي النقطة  $H$ : نقطة تماس الكرة بالمستوي  $(P)$ .

• **الحالة 02:**  $0 < OH < R$ 

مقطع الكرة بالمستوي  $(P)$  هو دائرة نصف قطرها  $\sqrt{R^2 - OH^2}$ .

• **الحالة 03:**  $OH = 0$ 

أي أن  $O$  و  $H$  متطابقان، وهذا يعني أن المستوي  $(P)$  يمر من مركز الكرة. مقطع كرة بمستوي يمر بمركزها هو دائرة كبرى.

## 2. مقطع بلاطة قائمة بمستوي:

• مقطع بلاطة قائمة بمستوي مواز لأحد أوجهها هو مستطيل له نفس بُعدي الوجه الموازي له.

• مقطع بلاطة قائمة بمستوي مواز لأحد أحرّفه هو مستطيل طوله أو عرضه يساوي طول ذلك الحرف.

## 3. المقاطع المستوية لأسطوانة الدوران:

• مقطع أسطوانة بمستوي مواز لمحورها هو مستطيل، طوله أو عرضه يساوي ارتفاع الأسطوانة.

• مقطع أسطوانة بمستوي مواز لقاعدتها هو قرص مطابق لقاعدتها.

## 4. المقاطع المستوية لهرم ولمخروط:

• مقطع هرم بمستوي مواز لقاعدته هو سطح له نفس طبيعة القاعدة وبأبعاد مصغرة.

• مقطع مخروط دوراني بمستوي مواز لقاعدته هو قرص مصغر لقاعدته.

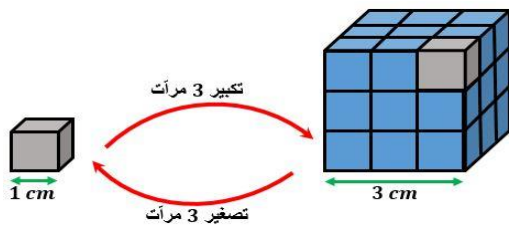
## ❖ التكبير - التصغير:

• إذا ضربنا كل أبعاد مجسم بعدد موجب  $k$  نكون قد قمنا بتكبيره إذا كان  $k > 1$  وبتصغيره إذا كان  $0 < k < 1$ . يسمي العدد  $k$  معامل أو سلم التكبير (التصغير).

## ❖ خواص:

- التكبير والتصغير لا يغيران طبيعة المجسمات.
- التكبير والتصغير يحافظان على الزوايا.
- إذا كبرنا أو صغرنّا مجسّمًا بالسلم  $k$ ، فإن:
  - ✓ أبعاده تضرب في العدد  $k$ .
  - ✓ مساحته تضرب في العدد  $k^2$ .
  - ✓ حجمه يضرب في العدد  $k^3$ .

## مثال 01:



حرفه:  $3 \text{ cm}$       حرفة:  $1 \text{ cm}$   
مساحة وجهه:  $3^2 \text{ cm}^2$       مساحة وجهه:  $1 \text{ cm}^2$   
حجمه:  $3^3 \text{ cm}^3$       حجمه:  $1 \text{ cm}^3$

## مثال 02:

في الشكل  $SABCD$  هرم قاعدته مربع. مقطع مستوي لهذا الهرم هو المربع  $EFGH$ ، طول ضلعه تصغير لطول ضلع مربع قاعدة الهرم. لدينا:  $(AB) // (EF)$  و  $(DC) // (GH)$  و  $(AD) // (EH)$  و  $(BC) // (FG)$ . والشكل  $SEFGH$  هو تصغير للهرم  $SABCD$  بالنسبة  $K = \frac{SE}{SA} = \frac{SH}{SD} = \dots = \frac{EH}{AD}$

## تمارين - وضعيات

**التمرين 01:** ليكن المثلث  $ABC$  الذي مساحته  $12,5 \text{ m}^2$ .

• ماهي مساحة المثلث المكبر  $MNE$  بالمعامل 4 للمثلث  $ABC$ ؟

**التمرين 02:** مساحة شكل هندسي  $18,6 \text{ cm}^2$ . قمنا بتحويل له، فأصبحت مساحته  $142,29 \text{ cm}^2$ .

• هل هذا التحويل تصغير أو تكبير للشكل؟ ماهو معاملته؟

**التمرين 03:** مثلث  $ABC$  مساحته  $S = 140 \text{ cm}^2$ .

• نقطة  $D$  من  $[AB]$  حيث:

$$AD = 0,2 \times AB$$

• نقطة  $E$  من  $[AC]$  حيث:

$$AE = 0,2 \times AC$$

بين أن المستقيمين  $(DE)$  و  $(BC)$  متوازيان.

المثلث  $ADE$  تصغير للمثلث  $ABC$ . ماهو سلم التصغير؟

• احسب مساحة المثلث  $ADF$ .

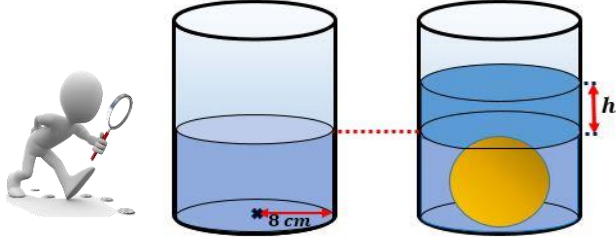


#### الوضعية 04:

هرم خفرع بمصر هو هرم منتظم قاعدته على شكل مربع طول ضلعه  $215\text{ m}$  وارتفاعه  $143\text{ m}$ .  
 • احسب حجم الهرم ( أعط الناتج بالتقريب إلى  $(0, 1)$  ).

#### الوضعية 05:

نضع كرية من حديد نصف قطرها  $6\text{ cm}$  في حوض مائي اسطواني الشكل كما هو موضح في الشكل:



• أوجد ارتفاع الماء المزاح  $h$  إذا علمت أن الكرية غُمرت كلياً.

#### الوضعية 06:

جُلة قطرها  $10\text{ cm}$ ، كتلتها  $150\text{ g}$ .  
 • ماهي كتلة جُلة مصنوعة من نفس المادة والتي نصف قطرها  $15\text{ cm}$ ؟

#### الوضعية الإدماجية: (BEM 2009)

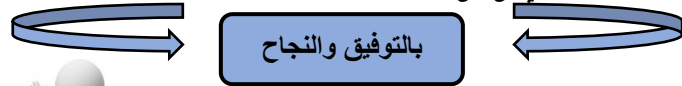
تم بناء خزان للماء على شكل أسطوانة دورانية نصف قطر قاعدتها  $5\text{ m}$  وارتفاعها  $4\text{ m}$  لتزويد مسبح على شكل متوازي مستطيلات بعدا قاعدته  $20\text{ m}$  و  $6\text{ m}$  وارتفاعه  $2\text{ m}$ .

- احسب سعة كل من الخزان و المسبح ( نأخذ  $\pi = 3,14$  ).
- إذا علمت أن الخزان مملوء تماما و المسبح فارغ تماما و تدفق الماء في المسبح هو  $(12\text{ m}^3/\text{h})$  أي  $12\text{ m}^3$  في الساعة، احسب كمية الماء المتدفقة في المسبح و كمية الماء المتبقية في الخزان بعد مرور ثلاث ساعات.
- نفرض أن الخزان مملوء ( سعته  $314\text{ m}^3$  ) و المسبح فارغ نسمي  $f(x)$  كمية الماء المتبقية في الخزان و  $g(x)$  كمية الماء المتدفقة في المسبح بالترتيب بعد مرور  $x$  ساعة.  
 • اوجد العبارة  $g(x)$  ثم استنتج العبارة  $f(x)$  بدلالة  $x$ .
- نعتبر الدالتين  $f$  و  $g$  حيث:

$$f(x) = 314 - 12x$$

$$g(x) = 12x$$

- أرسم التمثيل البياني لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  في معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . (يؤخذ:  $1\text{ cm}$  يمثل  $4\text{ h}$  على محور الفواصل و  $1\text{ cm}$  يمثل  $50\text{ m}^3$  على محور الترتيب)
- أوجد الوقت المستغرق لملء المسبح.
- حل المعادلة  $f(x) = g(x)$ .
- ماذا يمثل حل هذه المعادلة؟

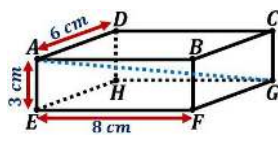


التمرين 04: يكبر نصف قطر كرة بنسبة 20%.

- باي نسبة مئوية تكبر مساحتها؟
- باي نسبة مئوية يكبر حجم الكرة المحددة بهذه الكرة؟

التمرين 05: قاعة على شكل متوازي مستطيلات، ارتفاعها  $3\text{ cm}$  و أرضيتها المستطيلة  $EFGH$  حيث:  $EH = 6\text{ cm}$ ،  $EF = 8\text{ cm}$ .

- ما نوع المثلث  $ACG$ ؟
- أنشئ المثلث  $ACG$  ( نأخذ  $1\text{ cm}$  لكل  $1\text{ m}$  ). احسب  $AG$ .
- نقطة  $M$  من قطعة المستقيم  $[AG]$  بحيث:  $\frac{GM}{GA} = \frac{1}{3}$ . المستقيم الموازي لـ  $(CG)$  و المار من النقطة  $M$  يقطع  $(AC)$  في النقطة  $N$ . احسب  $CN$ .

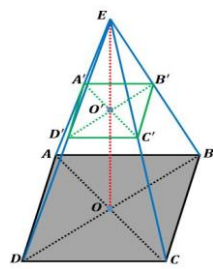


التمرين 06: أصبح حجم مخروط دوران  $4,5\pi\text{ cm}^2$  بتصغير معاملته  $k$ .

- ما معامل التصغير علما بأن حجم المخروط الأصلي  $36\pi\text{ cm}^3$ ؟
- جد ارتفاع المخروط قبل التصغير إذا علمت أن مساحة قاعدته تساوي  $9\pi\text{ cm}^2$  وطول المولد  $5\text{ cm}$ .
- جد ارتفاع المخروط بعد التصغير و احسب مساحة قاعدته بطريقتين.

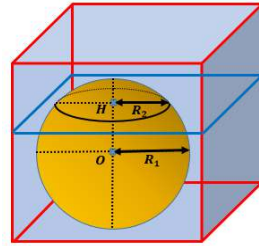
التمرين 07: هرم  $ABCDE$  قاعدته مربع رأسه  $E$  و ارتفاعه  $[EO]$  حيث  $OE = 5\text{ cm}$ .

- يوازي قاعدته حيث  $O'E = 2,6\text{ cm}$ .
- عين معامل تصغير الهرم المصغر الناتج.
- احسب مساحة قاعدة الهرم المصغر بدلالة مساحة قاعدة الهرم الأصلي و حجم الهرم المصغر بدلالة حجم الهرم الأصلي.



#### التمرين 08:

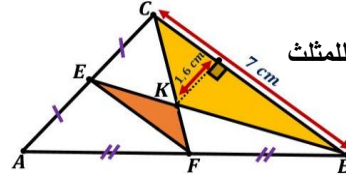
- تُحمر كرة جزنيا كما هو موضح في الشكل.
- نصف قطر الكرة  $R_1 = 5\text{ cm}$ .
- نصف قطر الدائرة الظاهرة جراء تقاطع سطح الماء بالكرة:  $R_2 = 4\text{ cm}$ .
- أوجد ارتفاع الجزء المغمور من الكرة.



#### التمرين 09:

$ABC$  مثلث.  $E$  منتصف  $[AC]$  و  $F$  منتصف  $[AB]$  و  $K$  نقطة تقاطع  $(EB)$  و  $(FC)$ .

- بين أن المثلث  $EFK$  هو تصغير للمثلث  $BCK$ . حدد نسبة التصغير.
- احسب مساحة المثلث  $EFK$ .



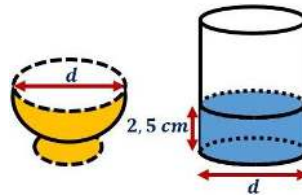
#### الوضعية 01:

- تغطي البحار والمحيطات حوالي 70% من مساحة سطح الكرة الأرضية.
- إذا اعتبرنا أن الأرض كروية الشكل نصف قطرها  $6730\text{ km}$ .
- احسب المساحة التي تغطيها القارات بالكيلو متر المربع ( مدورة إلى الوحدة ).



#### الوضعية 02:

- إناء نصف كروية الشكل مملوء بالماء، عندما نسكب هذا الماء في الوعاء اسطواني الشكل، يرتفع الماء بـ  $2,5\text{ cm}$ .
- احسب قطر الوعاء.
- احسب بالسنتيلتر كمية الماء المحتوى في الإناء.

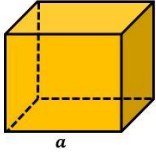


#### الوضعية 03:

- قطر كرة القدم  $24\text{ cm}$ .
- احسب مساحة وحجم الكرة بدلالة  $\pi$ .

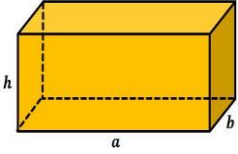


## مساحة وحجم المكعب:



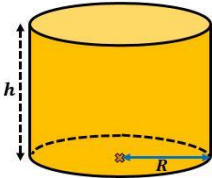
شكل القاعدة: مربع  
 مساحة القاعدة  $B: B = a \times a = a^2$   
 المساحة الجانبية  $A: A = B \times 4$   
 المساحة الكلية  $S: S = B \times 6$   
 الحجم  $V: V = a \times a \times a = a^3$

## مساحة وحجم متوازي المستطيلات:



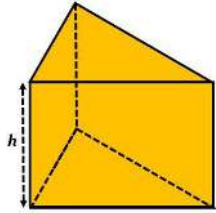
شكل القاعدة: مستطيل  
 مساحة القاعدة  $B: B = a \times b$   
 المساحة الجانبية  $A: A = P \times h$   
 $P$ : هو محيط المستطيل.  
 المساحة الكلية  $S: S = A + 2B$   
 الحجم  $V: V = B \times h$

## مساحة وحجم أسطوانة الدوران:



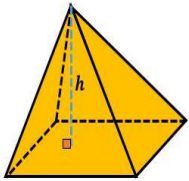
شكل القاعدة: قرص  
 مساحة القاعدة  $B: B = \pi \times R^2$   
 المساحة الجانبية  $A: A = P \times h$   
 $P$ : هو محيط الدائرة.  
 المساحة الكلية  $S: S = A + 2B$   
 الحجم  $V: V = B \times h$

## مساحة وحجم الموشور القائم:



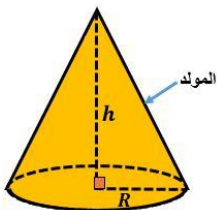
شكل القاعدة: مضلع (مثلث، مربع، ...)  
 مساحة القاعدة  $B$ : حسب شكل القاعدة.  
 المساحة الجانبية  $A: A = P \times h$   
 $P$ : هو محيط القاعدة.  
 المساحة الكلية  $S: S = A + 2B$   
 الحجم  $V: V = B \times h$

## مساحة وحجم الهرم:



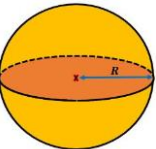
شكل القاعدة: مضلع (مثلث، مربع، ...)  
 مساحة القاعدة  $B$ : حسب شكل القاعدة.  
 المساحة الجانبية  $A: A = n \times$  مساحة وجه  
 $n$ : هو عدد أوجه الهرم.  
 المساحة الكلية  $S: S = A + B$   
 الحجم  $V: V = \frac{1}{3} \times B \times h$

## مساحة وحجم المخروط الدوراني:



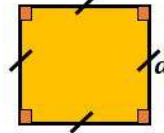
شكل القاعدة: قرص  
 مساحة القاعدة  $B: B = \pi \times R^2$   
 المساحة الجانبية  $A: A = \frac{P \times \text{المولد}}{2}$   
 $P$ : هو محيط الدائرة.  
 المساحة الكلية  $S: S = A + B$   
 الحجم  $V: V = \frac{1}{3} \times B \times h$

## مساحة الكرة، حجم الكرة:



المساحة الكلية  $S: S = 4\pi \times R^2$   
 الحجم  $V: V = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$

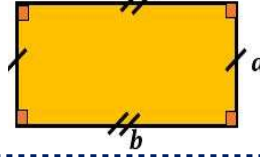
## محيط ومساحة المربع:



$$P = a \times 4$$

$$S = a \times a = a^2$$

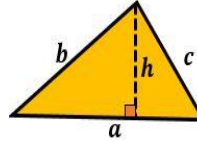
## محيط ومساحة المستطيل:



$$P = (a + b) \times 2$$

$$S = a \times b$$

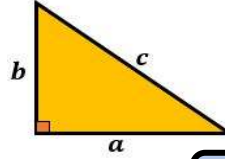
## محيط ومساحة المثلث:



$$P = a + b + c$$

$$S = \frac{a \times h}{2}$$

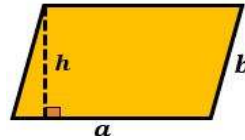
## محيط ومساحة المثلث القائم:



$$P = a + b + c$$

$$S = \frac{a \times b}{2}$$

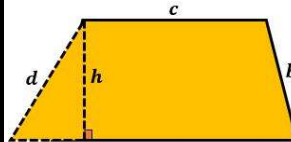
## محيط ومساحة متوازي الأضلاع:



$$P = (a + b) \times 2$$

$$S = a \times h$$

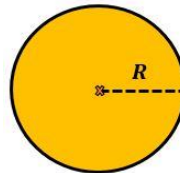
## محيط ومساحة شبه المنحرف:



$$P = a + b + c + d$$

$$S = \frac{(a + c) \times h}{2}$$

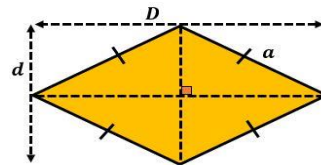
## محيط الدائرة، مساحة القرص:



$$P = 2\pi R$$

$$S = \pi \times R^2$$

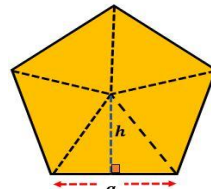
## محيط ومساحة المعين:



$$P = a \times 4$$

$$S = \frac{D \times d}{2}$$

## محيط ومساحة المضلع المنتظم:



$$P = a \times n$$

$n$ : هو عدد الأضلاع.

$$S = n \times \left( \frac{a \times h}{2} \right)$$