4am

مُلَخَّصْ

الخمس مقاطع الأولى

من إعداد الأستاذ:
حمزة حميدي

الموسم الدراسي: 2023/2022

المستوى: الرابعة متوسط

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات

المقاطع

- المقطع الأول: الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة والحساب على الجذور.
- المقطع الثاني: خاصية طالس وحساب المثلثات في المثلث القائم.
- المقطع الثالث: الحساب الحرفي.
- المقطع الرابع: الأشعة والانسحاب والمعالم.
- المقطع الخامس: جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين، الدالة الخطية، تطبيقات التناسبية، الدالة التآلفية.

-بالإضافة إلى خاصية فيثاغورس.

الأعداد الطبيعية والأعداد الناطقة

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات **facebook**

قواسم عدد طبيعي

a و b عددان طبيعيان حيث $b \neq 0$.
القول أن b قاسم للعدد a معناه يوجد عدد طبيعي q حيث: $a = b \times q$

ملاحظات:

1)كل الجمل الآتية لها نفس المعنى:

- b قاسم للعدد a
- b يقسم a
- a يقبل القسمة على b
- a مضاعف ل b

2) 1 قاسم لجميع الأعداد الطبيعية.

3) 0 مضاعف لجميع الأعداد الطبيعية.

4) كل عدد طبيعي غير معدوم يقبل القسمة على نفسه.

خواص قواسم عدد طبيعي

خاصية1:

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم $a+b$ و $a-b$ ؛ $(a \geq b)$
- إذا كان n يقسم a فإن n يقسم $k \times a$ حيث k عدد طبيعي.

مثال:

3 يقسم 9 ويقسم 27
إذن 3 يقسم 9+27 أي يقسم 36
و 3 يقسم 9-27 أي يقسم 18

خاصية2:

a ، b و n أعداد طبيعية غير معدومة حيث $a > b$.

- إذا كان n يقسم كلا من a و b فإن n يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد a على b.

مثال:
5 يقسم 90 ويقسم 25 إذن 5 يقسم باقي القسمة الإقليدية للعدد 90 على 25
أي 5 يقسم 15

القاسم المشترك الأكبر (pgcd)

يسمى أكبر قاسم مشترك لعددين طبيعيين a و b القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين، ويرمز له بالرمز PGCD(a;b)

خواص

a و b عددان طبيعيان.

$PGCD(a;a) = a$ مثال: $PGCD(7;7) = 7$

$PGCD(a;0) = a$ مثال: $PGCD(3;0) = 3$

- إذا كان b قاسم للعدد a فإن:

$PGCD(a;b) = b$ مثال: $PGCD(6;2) = 2$

حساب القاسم المشترك الأكبر

الطريقة الأولى: استخراج قائمة القواسم المشتركة للعددين

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 12 و 18
قواسم العدد 12 هي: 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 و 12
قواسم العدد 18 هي: 1 ، 2 ، 3 ، 6 ، 9 و 18
ومنه القواسم المشتركة للعددين 12و18
هي: 1 ، 2 ، 3 و 6
إذن القاسم المشترك الأكبر للعددين 12و 18 هو: 6

$$PGCD(18;12) = 6$$

الطريقة الثانية: استعمال خوارزمية الفروق المتتابعة

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 117 و 91

$$\begin{aligned} 117 - 91 &= 26 \\ 91 - 26 &= 65 \\ 65 - 26 &= 39 \\ 39 - 26 &= 13 \\ 26 - 13 &= \boxed{13} \\ 13 - 13 &= 0 \end{aligned}$$

إذن: $PGCD(117;91) = 13$

الطريقة الثالثة: استعمال خوارزمية إقليدس

مثال: حساب القاسم المشترك الأكبر للعددين 528 و 468

$$\begin{aligned} 528 &= 468 \times 1 + 60 \\ 468 &= 60 \times 7 + 48 \\ 60 &= 48 \times 7 + \boxed{12} \\ 48 &= 12 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

إذن: $PGCD(528;468) = 12$

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

العددان الأوليان فيما بينهما

العددان a و b أوليان فيما بينهما يعني أن قاسمهما المشترك الأكبر يساوي 1 .
نكتب: PGCD(a;b)=1

مثال1:

قواسم العدد 14 هي: 1 ، 2 ، 7 و 14

قواسم العدد 15 هي: 1 ، 3 ، 5 و 15

ومنه القاسم المشترك الأكبر للعددين 14و 15 هو: 1

$PGCD(14;15)=1$

إذن العددان 14 و 15 أوليان فيما بينهما

مثال2:

هل العددان 120 و 725 أوليان فيما بينهما؟ دون حساب القاسم المشترك الأكبر.

العددان 120 و 725 يقبلان القسمة على 5 لأن:

- العدد 120 يقبل القسمة على 5 لأن رقم احاده 0
- العدد 725 يقبل القسمة على 5 لأن رقم احاده 5

ومنه: $PGCD(120;725)\neq 1$

إذن: العددان 120 و 725 ليسا أوليان فيما بينهما

الكسور غير القابلة للاختزال

الكسر غير القابل للاختزال هو الكسر الذي بسطه ومقامه اوليان فيما بينهما.
لكتابة كسر على شكل كسر غير قابل للاختزال نقسم بسطه ومقامه على القاسم المشترك الأكبر لهما.

مثال1:

الكسر $\frac{15}{14}$ غير قابل للختزال لأن القاسم المشترك الأكبر للعددين 15 و 14 هو : 1

مثال2:

كتابة الكسر $\frac{91}{117}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال

لدينا مما سبق: $PGCD(117;91)=13$

ومنه: $\frac{91}{117}=\frac{91\div 13}{117\div 13}=\frac{7}{9}$

تمرين

أراد العم أحمد تبليط غرفة مستطيلة الشكل، طولها 780cm وعرضها 450cm ببلاط مربع الشكل، اتصل العم أحمد بصاحب مصنع للبلاط فأخبره هذا الأخير أنه يوجد آلة خاصة بتقطيع البلاط إلى مربعات متقايسة حسب الحاجة.

يريد العم أحمد حساب عدد البلاط اللازم لتبليط كل الغرفة وهذا بشراء أقل عدد ممكن من البلاط.

-ساعد العم أحمد في معرفة عدد البلاط اللازم شراءه.

الحل

أ- حساب طول ضلع البلاطة الواحدة:(نحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 780 و 450)

$$780=450\times 1+330$$
$$450=330\times 1+120$$
$$330=120\times 2+90$$
$$120=90\times 1+\boxed{30}$$
$$30=30\times 3+0$$

ومنه: $PGCD(780;450)=30$

إذن طول ضلع كل بلاطة هو: $30cm$

ب- حساب عدد البلاط اللازم شراءه:

- حساب مساحة الغرفة:

$$A_1=780\times 450$$
$$A_1=351000$$

- حساب مساحة البلاطة الواحدة:

$$A_2=30\times 30$$
$$A_2=900$$

ومنه: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{351000}{900}=390$

إذن عدد البلاط اللازم شراءه هو: 390 بلاطة

تعريف

a عدد موجب.
الجذر التربيعي للعدد a هو العدد الموجب الذي مربعه يساوي a.

نرمز للجذر التربيعي للعدد a بالرمز $\sqrt{a}$.
ونقرأ: "الجذر التربيعي لـa" أو "جذرa"

خواص: a عدد موجب.

$$\sqrt{a^2} = a \quad ; \quad (\sqrt{a})^2 = a$$

ملاحظة:

$$\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$$

$$(-\sqrt{a}) \times (-\sqrt{a}) = (-\sqrt{a})^2 = a$$

أمثلة:

$$\sqrt{3^2} = 3 \; ; \; (\sqrt{7})^2 = 7 \; ; \; \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$$

الأعداد الناطقة والأعداد غير الناطقة

a عدد ناطق موجب.

- في حالة a مربعا لعدد ناطق، يكون $\sqrt{a}$ عددا ناطقا.
- في حالة a ليس مربعا لعدد ناطق، فإن $\sqrt{a}$ ليس عددا ناطقا.

أمثلة:

- نعلم أنه لا يوجد عدد ناطق مربعه 6، إذن $\sqrt{6}$ عدد غير ناطق
- نعلم أنه يوجد عدد ناطق مربعه 9 وهو 3 $3^2 = 9$، إذن $\sqrt{9}$ عدد ناطق

$\sqrt{16}$ عدد ناطق ؛ $\sqrt{36}$ عدد ناطق ؛ $\sqrt{81}$ عدد ناطق

$\sqrt{7}$ عدد غير ناطق ؛ $\sqrt{19}$ عدد غير ناطق ؛ $\sqrt{33}$ عدد غير ناطق

العمليات على الجذور التربيعية

خاصية1: من أجل كل عددين موجبين a و b

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

ملاحظة:

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

أمثلة:

$$\sqrt{5} \times \sqrt{3} = \sqrt{15}$$

$$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{36} = 6$$

$$\sqrt{22} = \sqrt{11 \times 2} = \sqrt{11} \times \sqrt{2}$$

$$\sqrt{63} = \sqrt{9 \times 7} = \sqrt{3^2 \times 7} = 3\sqrt{7}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}$$

خاصية2: من أجل كل عددين موجبين a و b حيث $b \neq 0$.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

أمثلة:

$$\frac{\sqrt{40}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} \quad ; \quad \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

ملاحظة2:

في حالة $a < 0$ و $b < 0$ فإن $\sqrt{a \times b}$ و $\sqrt{\frac{a}{b}}$ موجودين مع أن كل من $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ لا معنى لهما.

أمثلة:

- $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{\frac{-32}{-2}} = \sqrt{16} = 4$

ملاحظة3:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b} \; ; \; a > 0 \; ; \; b > 0$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b} \; ; \; b > 0 \; ; \; a > b$$

مثال: $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

لأن: $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

حل معادلة من الشكل $x^2 = b$

b عدد كيفي.

- إذا كان $b > 0$ فإن المعادلة $x^2 = b$ تقبل حلين متعاكسين هما: $\sqrt{b}$ و $-\sqrt{b}$.
- إذا كان $b = 0$ فإن المعادلة $x^2 = 0$ تقبل حلا واحدا وهو العدد 0.
- إذا كان $b < 0$ فإن المعادلة $x^2 = b$ لا تقبل أي حل.

أمثلة:

● $x^2 = 15$ معناه: $x = \sqrt{15}$ أو $x = -\sqrt{15}$

ومنه للمعادلة حلين هما: $\sqrt{15}$ و $-\sqrt{15}$.

● $x^2 = 0$

للمعادلة حل واحد وهو 0.

● $x^2 = -16$

المعادلة لا تقبل أي حل.

نسبة مقامها عدد غير ناطق

a عدد كيفي؛ b عدد ناطق موجب تماما.

لجعل مقام النسبة $\frac{a}{\sqrt{b}}$ عددا ناطقا، نضرب كلا من البسط والمقام في نفس العدد $\sqrt{b}$.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

أمثلة:

● $$\frac{11}{\sqrt{3}} = \frac{11 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{3}$$

● $$\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{7}}{3\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{35}}{3 \times 7} = \frac{\sqrt{35}}{21}$$

● $$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{7}}{\sqrt{7} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{14}}{7}$$

● $$\frac{6+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{(6+\sqrt{2})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}+2}{2}$$

$$= \frac{2(3\sqrt{2}+1)}{2} = 3\sqrt{2}+1$$

تبسيط عبارة تتضمن جذور

تبسيط عبارة تتضمن جذورا هو كتابتها على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد صحيح و b أصغر عدد طبيعي ممكن .

x ، y ، z أعداد صحيحة، b عدد طبيعي.

لتبسيط العبارة: $x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b}$

نطبق الخاصية التوزيعية:

$$x\sqrt{b} + y\sqrt{b} + z\sqrt{b} = (x+y+z)\sqrt{b}$$

مثال1:

$$8\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{5} = (8-3+1)\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

مثال2: كتابة العبارة A على الشكل $a\sqrt{b}$ حيث a عدد صحيح و b أصغر عدد طبيعي ممكن:

$$A = 7\sqrt{50} + \sqrt{18} - 3\sqrt{8}$$
$$A = 7\sqrt{25 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} - 3\sqrt{4 \times 2}$$
$$A = 7\sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt{3^2 \times 2} - 4\sqrt{2^2 \times 2}$$
$$A = 35\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{2}$$
$$A = (35+3-8)\sqrt{2}$$
$$\boxed{A = 30\sqrt{2}}$$

مثال2: كتابة العبارة B على الشكل $a\sqrt{5}$ حيث a عدد صحيح:

$$B = 2\sqrt{45} - 3\sqrt{180} - \sqrt{605}$$
$$B = 2\sqrt{9 \times 5} - 3\sqrt{36 \times 5} - \sqrt{121 \times 5}$$
$$B = 2\sqrt{3^2 \times 5} - 3\sqrt{6^2 \times 5} - \sqrt{11^2 \times 5}$$
$$B = 6\sqrt{5} - 18\sqrt{5} - 11\sqrt{5}$$
$$B = (6-18-11)\sqrt{5}$$
$$\boxed{B = -23\sqrt{5}}$$

تذكير قواعد الحساب على قوة عدد نسبي

a و b عددان غير معدومين ؛ m و n عددان نسبيان صحيحان

القاعدة	مثال
$a^0 = 1$	$7^0 = 1$
$a^1 = a$	$6^1 = 6$
$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$3^7 \times 3^6 = 3^{7+6} = 3^{13}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{6^{13}}{6^4} = 6^{13-4} = 6^9$
$(a^m)^n = a^{m \times n}$	$(2^4)^3 = 2^{4\times3} = 2^{12}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$
$(a \times b)^m = a^m \times b^m$	$(3 \times 5)^2 = 3^2 \times 5^2$
$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

خـــــاصية طـــــالـــــس

خـــــاصية طالـــــس

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

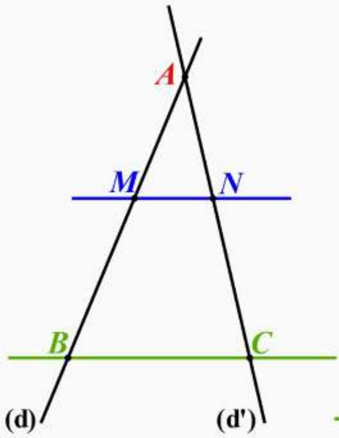
(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A

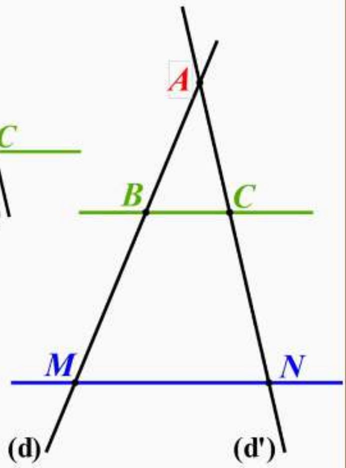
B و M نقطتان من (d) تختلفان عن A.

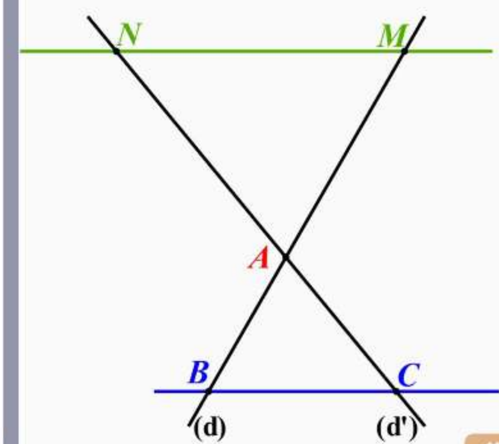
C و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

إذا كان (MN) و (BC) متوازيين فإن:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$







ملاحظة

تسمح خاصية طالس بحساب الأطوال والنسب وإثبات عدم توازي مستقيمين.

الخاصية العكسية

(d) و (d') مستقيمان متقاطعان في النقطة A

B و M نقطتان من (d) تختلفان عن A.

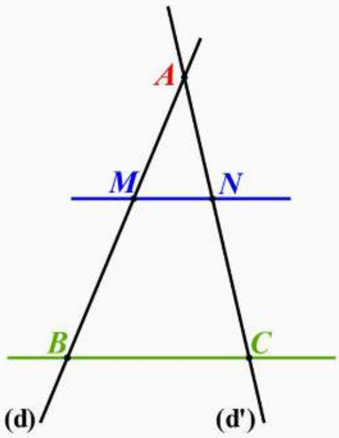
C و N نقطتان من (d') تختلفان عن A.

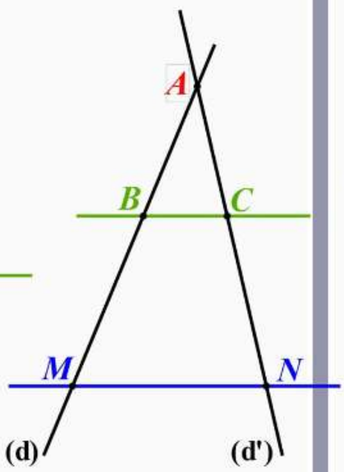
إذا كان $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ وكانت النقطA ، B ، M

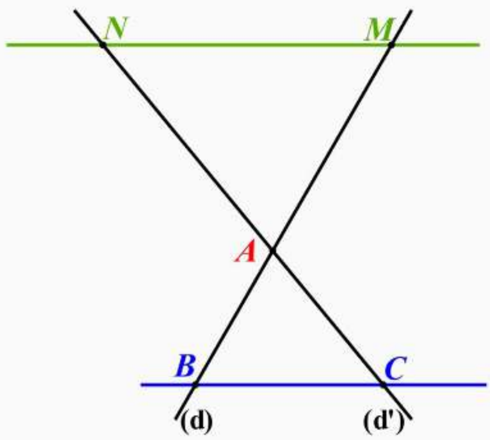
والنقط A ، C ، N مرتبة بنفس الترتيب فإن

$(MN)//(BC)$ حسب الخاصية العكسية لخاصية طالس

يمكن ترجمة هذه الخاصية بإحدى الوضعيات التالية:







ملاحظة

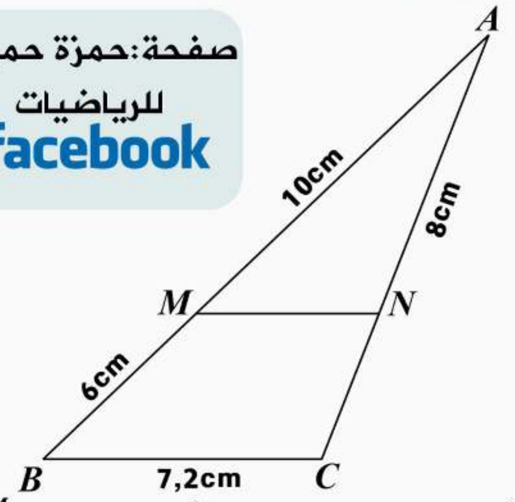
تسمح خاصية طالس العكسية بإثبات توازي مستقيمين.

خـــاصية طـــالـــس

حساب الأطوال والنسب

مثال1: لاحظ الشكل الآتي حيث: $(MN)\ //(BC)$

صفحة:حمزة حميدي
للرياضيات
facebook



-اُحسب الطول AC، ؛ -اُحسب النسبة $\frac{AM}{MN}$.

-حساب الطول AC:

لدينا:

المستقيمان (MN) و (CD) متوازيان
والنقط A، M، B في استقامية وكذلك
النقط A، N، C في استقامية
وعليه حسب خاصية طالس نجد:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

بالتعويض: $$\frac{10}{10+6} = \frac{8}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

نأخذ: $$\frac{10}{16} = \frac{8}{AC}$$

ومنه: $$AC = \frac{16 \times 8}{10}$$

إذن: $$AC = 12{,}8cm$$

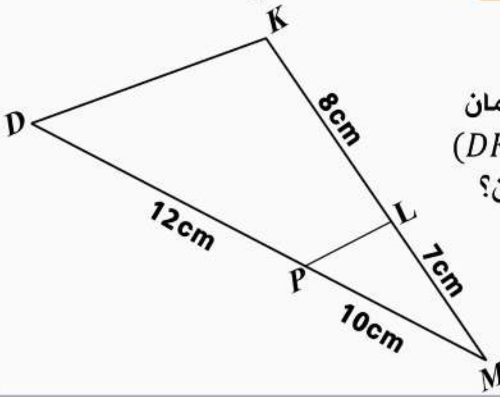
-حساب النسبة $\frac{AM}{MN}$:

لدينا: $\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}$ ومنه: $\frac{AM}{MN} = \frac{AB}{BC}$

إذن: $$\frac{AM}{AN} = \frac{16}{7{,}2}$$

إثبات عدم التوازي

مثال2: لاحظ الشكل التالي:



هل المستقيمان (DK)و(LP) متوازيان؟

-تبيان إن كان المستقيمان (DK)و(LP) متوازيان:

لدينا:

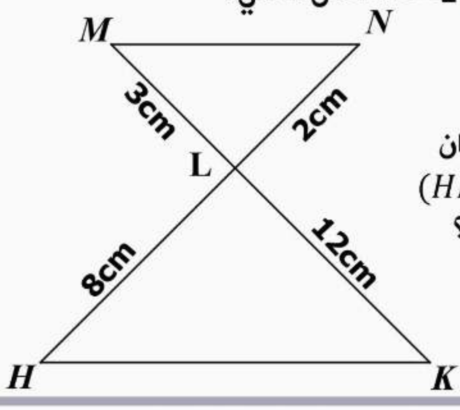
$$\frac{MP}{MD} = \frac{10}{10+12} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11} \quad \text{و} \quad \frac{ML}{MK} = \frac{7}{7+8} = \frac{7}{15}$$

ومنه: $11 \times 7 = 77$ و $5 \times 15 = 75$

بما أن $\frac{ML}{MK} \neq \frac{MP}{MD}$ فإن المستقيمان (LP) و (DK)
غير متوازيين حسب خاصية طالس.

إثبات التوازي

مثال3: لاحظ الشكل التالي:



هل المستقيمان (HK)و(MN) متوازيان؟

-تبيان إن كان المستقيمان (HK)و(MN) متوازيان:

لدينا:

$$\frac{LN}{LH} = \frac{2}{8} = 0{,}25 \quad \text{و} \quad \frac{LM}{LK} = \frac{3}{12} = 0{,}25$$

وعليه: $\frac{LN}{LH} = \frac{LM}{LK}$

وبما أن النقط M، L، K والنقط N، L، H في
استقامية وبنفس الترتيب فإن $(MN)\ //(HK)$
حسب الخاصية العكسية لخاصية طالس.

خـــاصية طـــالـــس

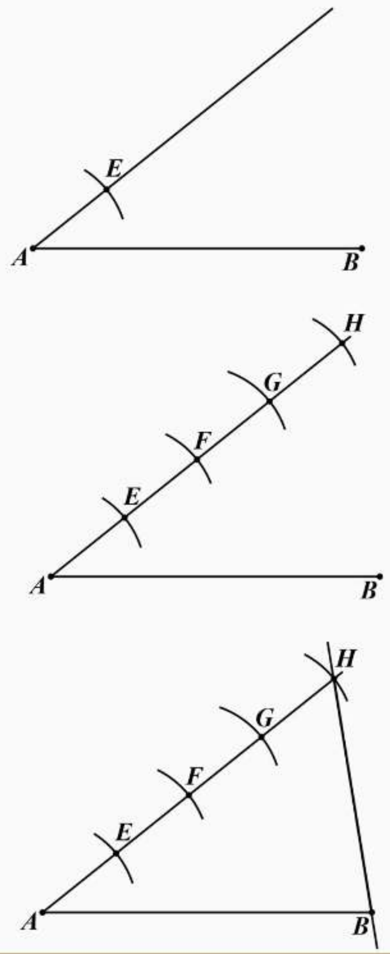
إنشاءات هندسية بسيطة

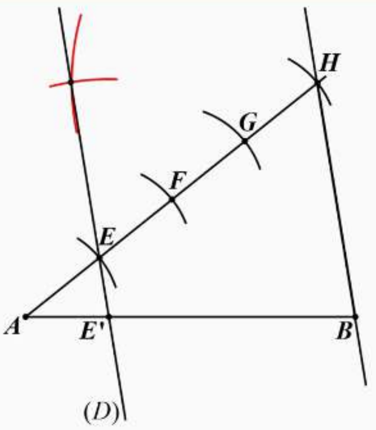
تقسيم قطعة مستقيم

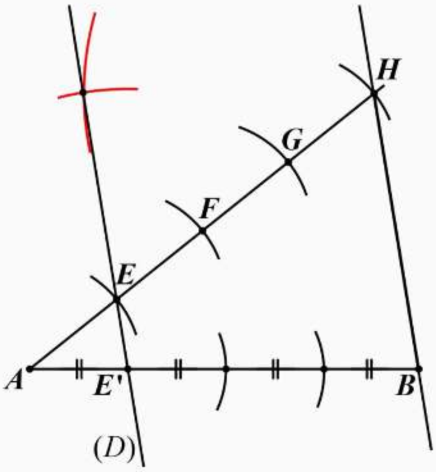
لتقسيم قطعة مستقيم $[AB]$ إلى n قطعة كلها متقايسة (nعدد طبيعي أكبر تماما من الواحد) نتبع المثال التالي:

مثال تقسيم قطعة المستقيم $[AB]$ إلى أربع قطع متقايسة:

- ننشئ نصف مستقيم مبدؤه A وحامله يختلف عن المستقيم (AB).
- على نصف المستقيم ننشئ بالمدور نقطة E.
- نقوم بإنشاء النقط F و G و H بنفس فتحة المدور.
- نرسم المستقيم (BH).
- ننشئ المستقيم (D) المستقيم المار من E والموازي للمستقيم (BH) (بالمدور أو بالكوس).
- نسمي E' نقطة تقاطع (D) و (AB).
- نقسم القطعة $[AB]$ إلى قطع متقايسة طولها AE' باستعمال المدور.





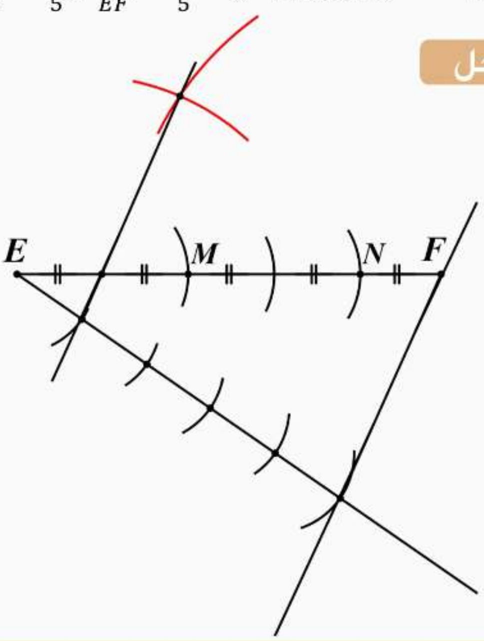


تمرين

$[EF]$ قطعة مستقيم طولها 6cm .

- ارسم قطعة المستقيم $[EF]$ ثم قم بتقسيمها إلى خمس قطع متقايسة.
- عين النقطتين M و N حيث : $\frac{EM}{EF} = \frac{2}{5}$ و $\frac{EN}{EF} = \frac{4}{5}$.

الحل



النسب المثلثية

نوظف النسب المثلثية في المثلث القائم لـ:

- حساب قيس زاوية حادة
- حساب النسب
- حساب طول ضلع
- انشاء زاوية حادة

جيب تمام زاوية حادة

جيب تمام (cos) زاوية حادة يساوي النسبة:

$$\frac{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$$

جيب زاوية حادة

جيب (sin) زاوية حادة يساوي النسبة:

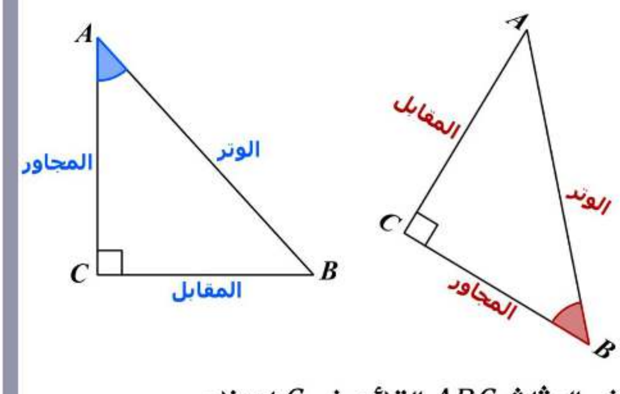
$$\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الوتر}}$$

ظل زاوية حادة

ظل (tan) زاوية حادة يساوي النسبة:

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل لهذه الزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور لهذه الزاوية}}$$

مثال1: ABC مثلث قائم في C



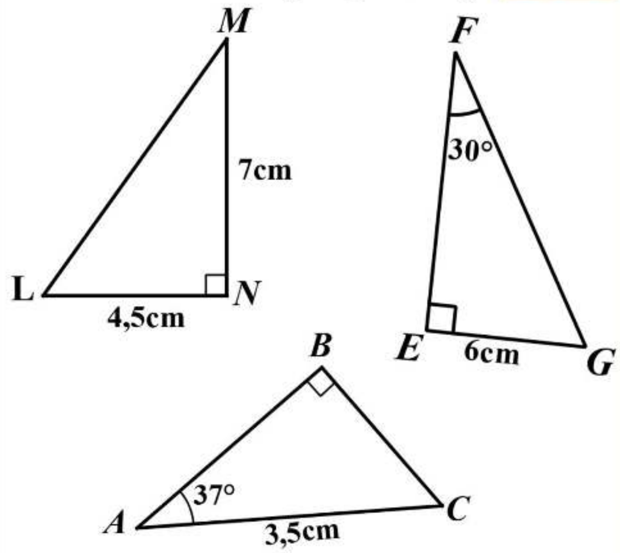
في المثلث ABC القائم في C لدينا :

$$\cos\hat{B} = \frac{BC}{AB} \qquad \cos\hat{A} = \frac{AC}{AB}$$

$$\sin\hat{B} = \frac{AC}{AB} \qquad \sin\hat{A} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan\hat{B} = \frac{AC}{BC} \qquad \tan\hat{A} = \frac{BC}{AC}$$

تمرين1 اليك الأشكال التالية:



1- أُحسب قيس الزاوية $\hat{L}$. (بالتدوير إلى الوحدة).

2- أُحسب الطول FG.

3- أُحسب الطول AB ، بالتدوير إلى الوحدة.

الحــل

1- حساب قيس الزاوية $\hat{L}$:

في المثلث LMN القائم في N لدينا:

$$\tan\hat{L} = \frac{MN}{LM} = \frac{7}{4{,}5}$$

$$\tan\hat{L} \approx 1{,}5555$$

باستعمال الالة الحاسبة وبالتدوير إلى الوحدة نجد:

$$\boxed{\hat{L} \approx 57°}$$

2- حساب الطول FG :

في المثلث EFG القائم في E لدينا:

$\sin\hat{F} = \dfrac{EG}{FG}$ بالتعويض: $\sin 30° = \dfrac{6}{FG}$

ومنه: $FG = \dfrac{6}{sin30°}$ إذن: $\boxed{FG = 12cm}$

3- حساب الطول AB :

في المثلث ABC القائم في B لدينا:

$\cos\hat{A} = \dfrac{AB}{AC}$ بالتعويض: $\cos 37° = \dfrac{AB}{3{,}5}$

ومنه: $AB = \cos 37° \times 3{,}5$ إذن: $\boxed{AB \approx 2{,}8cm}$

النسب المثلثية

تمرين2

أنشئ زاوية قيسها α حيث: $sin\alpha = 0,8$

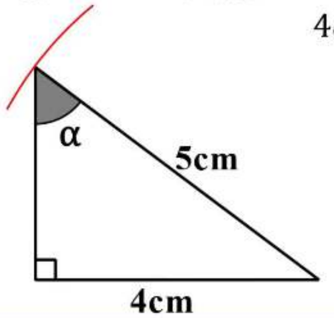
الحل

نضع وحدة الطول هي $1cm$

لدينا: $sin\alpha = 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

- البسط 4 يمثل طول الضلع المقابل للزاوية α
- المقام 5 يمثل طول الوتر

ننشئ مثلثا قائما طول وتره $5cm$ وطول أحد ضلعيه القائمين $4cm$



العلاقات المثلثية

من أجل كل x زاوية حادة في مثلث قائم لدينا:

$$\boxed{sin^2x + cos^2x = 1}$$

$$\boxed{tanx = \frac{sinx}{cosx}}$$

تمرين1

x هو قيس زاوية حادة حيث: $cosx = \frac{1}{2}$

1- أُحسب دون استعمال الالة الحاسبة، القيمة المضبوطة للعدد $sinx$.

2- استنتج القيمة المضبوطة للعدد $tanx$.

الحل

1- حساب القيمة المضبوطة للعدد $sinx$.

لدينا: $sin^2x + cos^2x = 1$

ومنه: $sin^2x = 1 - cos^2x$

$$sin^2x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$sin^2x = 1 - \frac{1}{4}$$

$$sin^2x = \frac{4}{4} - \frac{1}{4}$$

$$sin^2x = \frac{3}{4}$$

$$sinx = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{sinx = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2- استنتاج القيمة المضبوطة للعدد $tanx$

لدينا: $tanx = \frac{sinx}{cosx}$

ومنه:

$$tanx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

تمرين2

1- أُحسب $cos\hat{c}$ علما أن:

$$sin\hat{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad tan\hat{c} = \frac{3}{2}$$

الحل

- حساب $cos\hat{c}$:

لدينا: $tan\hat{c} = \frac{sin\hat{c}}{cos\hat{c}}$

ومنه: $cos\hat{c} = \frac{sin\hat{c}}{tan\hat{c}}$

بالتعويض: $cos\hat{c} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}}$

وبالتالي: $cos\hat{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{3}$

إذن: $cos\hat{c} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

خـــاصـــيـة فـيـثـاغـورس

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

خاصية فيثاغورس

إذا كان مثلث قائماً، فإن مربع طول وتره يساوي مجموع مربعي طولي ضلعيه الآخرين.

ملاحظة1

تسمح خاصية فيثاغورس بحساب طول ضلع في مثلث قائم بمعلومية طُولي الضلعين الآخرين.

مثال1

ABC مثلث قائم في A حيث: $AB = 4cm$ ، $AC = 3cm$

-حساب الطول BC

المثلث ABC قائم في A، وحسب خاصية فيثاغورس نجد:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$ بالتعويض: $BC^2 = 4^2 + 3^2$ ومنه: $BC^2 = 16 + 9$

ومنه: $BC^2 = 25$ ومنه: $BC = \sqrt{25}$ إذن: $\boxed{BC = 5cm}$

ملاحظة2

إذا كان في مثلث مربع أطول أضلاعه لا يساوي مجموع مربعي ضلعيه الآخرين

فإن هذا المثلث ليس قائما حسب خاصية فيثاغورس.

مثال2

LMN مثلث حيث: $LM = 5cm$ ، $LN = 6cm$ ، $MN = 7cm$

-نريد معرفة إن كان المثلث LMN قائماً:

لدينا: $MN^2 = 7^2 = 49$ و $LM^2 + LN^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$

بما أن: $LM^2 + LN^2 \neq MN^2$ فإن المثلث LMN ليس قائماً حسب خاصية فيثاغورس.

الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس

إذا كان في مثلث مربع طول أحد الأضلاع مساويا لمجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين فإن هذا المثلث قائم.

ملاحظة

تسمح الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس بإثبات أن مثلثاً عُلمت أطوال أضلاعه الثلاثة قائم.

مثال

EFG مثلث حيث: $EF = 6cm$ ، $EG = 8cm$ ، $FG = 10cm$

-تبيان طبيعة المثلث EFG:

لدينا: $FG^2 = 10^2 = 100$ و $EF^2 + EG^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

بما أن: $EF^2 + EG^2 = FG^2$

فإن المثلث EFG قائم في E حسب الخاصية العكسية لخاصية فيثاغورس

a، b، c وd أعداد

قاعدة حذف الأقواس في مجموع جبري

عند حذف قوسين مسبوقين بإشارة + لا نغير إشارات الحدود داخل القوسين.

$$\boxed{a + (b + c) = a + b + c}$$

$$\boxed{a + (b - c) = a + b - c}$$

<u>أمثلة:</u>

$$5x + (2x + 4) = 5x + 2x + 4$$

$$4 + (3x - 7) = 4 + 3x - 7$$

عند حذف قوسين مسبوقين بإشارة - نغير إشارات الحدود داخل القوسين.

$$\boxed{a - (b + c) = a - b - c}$$

$$\boxed{a - (b - c) = a - b + c}$$

<u>أمثلة:</u>

$$4x - (5 + 2x) = 4x - 5 - 2x$$

$$6x^2 - (3x - 1) = 6x^2 - 3x + 1$$

تبسيط عبارة جبرية

تبسيط عبارة جبرية يعني كتابتها بأقل عدد ممكن من الحدود في حالة المجموع أو العوامل في حالة الجداء.

<u>أمثلة:</u>

$$A = 2x + 7 - 5x + 1$$
$$A = 2x - 5x + 7 + 1$$
$$A = -3x + 8$$

$$B = -7x^2 - 15x - 9 + 3x^2 + 1$$
$$B = -7x^2 + 3x^2 - 15x - 9 + 1$$
$$B = -4x^2 - 15x - 8$$

$$C = 6x \times 2 \times 5x$$
$$C = 60x^2$$

نشر عبارة جبرية

نشر عبارة جبرية يعني تحويلها من جداء عاملين إلى مجموع جبري.

لنشر عبارة جبرية نستعمل الخاصية التوزيعية أو المتطابقات الشهيرة.

الخاصية التوزيعية

<u>توزيع الضرب على الجمع:</u>

$$\boxed{k(a + b) = ka + kb}$$

<u>توزيع الضرب على الطرح:</u>

$$\boxed{k(a - b) = ka - kb}$$

<u>التوزيع المضاعف:</u>

$$\boxed{(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd}$$

<u>أمثلة:</u>

- $3(2x + 5) = 6x + 15$
- $-4x(3x + 1) = -12x^2 - 4x$
- $(2x + 1)(3x + 2) = 6x^2 + 4x + 3x + 2$
  $= 6x^2 + 7x + 2$

المتطابقات الشهيرة

<u>مربع مجموع:</u>

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

<u>مربع فرق:</u>

$$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

<u>جداء مجموع حدين وفرقهما:</u>

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

<u>أمثلة:</u>

- $(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 5 + 5^2$
  $= 4x^2 + 20x + 20$
- $(4x - 3)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$
  $= 16x^2 - 24x + 9$
- $(3x + 1)(3x - 1) = (3x)^2 - 1^2$
  $= 9x^2 - 1$

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

تحليل عبارة جبرية

تحليل عبارة جبرية يعني تحويلها من مجموع جبري إلى جداء عاملين.

لتحليل عبارة جبرية يمكننا البحث عن العامل المشترك أو توظيف المتطابقات الشهيرة.

البحث عن العامل المشترك

نبحث عن العامل المشترك ثم نطبق احدى القاعدتين التاليتين:

$$\boxed{ka + kb = k(a + b)}$$

$$\boxed{ka - kb = k(a - b)}$$

أمثلة:

$A = 7x + 7y$
$A = 7(x + y)$

$B = 3x^2 + 2x$
$B = x(3x + 2)$

$C = 3x(x + 2) - 15x$
$C = 3x(x + 2) - 3x \times 5$
$C = 3x(x + 2 - 5)$
$C = 3x(x - 3)$

$D = (3x + 5)(7x + 2) - (7x + 2)^2$
$D = (3x + 5)(7x + 2) - (7x + 2)(7x + 2)$
$D = (7x + 2)[(3x + 5) - (7x + 2)]$
$D = (7x + 2)(3x + 5 - 7x - 2)$
$D = (7x + 2)(-4x + 3)$

توظيف المتطابقات الشهيرة

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

أمثلة:

$E = 4x^2 + 12x + 9$
$E = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2$
$E = (2x + 3)^2$

$F = 9x^2 - 30x + 25$
$F = (3x)^2 - 2 \times 3x \times 5 + 5^2$
$F = (3x - 5)^2$

$G = 16x^2 - 25$
$G = (4x)^2 - (5)^2$
$G = (4x + 5)(4x - 5)$

المعادلات والمترجحات

المعادلة من الدرجة الأولى

يؤول حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إلى حل معادلة من الشكل $ax = b$ حيث $a \neq 0$

الحل الوحيد لهذه المعادلة هو العدد $\frac{b}{a}$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$3x - 1 = 7x - 9$$
$$3x - 7x = -9 + 1$$
$$-4x = -8$$
$$x = \frac{-8}{-4}$$
$$x = 2$$

معادلة الجداء المعدوم

- كل معادلة من الشكل
$$(ax + b)(cx + d) = 0$$
حيث a، b، c وd أعداد معلومة، تسمى معادلة الجداء المعدوم

- حلول المعادلة:
$$(ax + b)(cx + d) = 0$$
هي حلول المعادلتين:
$ax + b = 0$ و $cx + d = 0$

مثال: حل المعادلة التالية:

$$(3x - 1)(2x + 6) = 0$$

$2x + 6 = 0$ أو $3x - 1 = 0$
$2x = -6$ أو $3x = 1$
$x = -3$ أو $x = \frac{1}{3}$

ومنه للمعادلة حلان هما: 3- و $\frac{1}{3}$

المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد

- المتراجحة بمجهول x هي متباينة قد تكون صحيحة وقد تكون خاطئة وهذا حسب قيم x.
- قيم x التي من أجلها تكون المتباينة صحيحة هي حلول المتراجحة.
- حل متراجحة هو إيجاد كل حلولها.

طريقة:

لحل متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد نستعمل القواعد الآتية:

- نُحافظ على اتجاه المتراجحة عندما نضيف (أو نطرح من) طرفيها نفس العدد.
- نُحافظ على نفس اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) نفس العدد الموجب تماما.
- نُغير اتجاه المتراجحة عندما نضرب طرفيها في (أو نقسم طرفيها على) العدد السالب تماما.

التمثيل البياني لحلول متراجحة

تُمثل حلول متراجحة على مستقيم عددي مُدرّج.

أمثلة: حُل المتراجحتين التاليتين ثم مثّل حلولهما بيانيا

المتراجحة 1

$$9x^2 - 16 \geq 9x^2 + 7x + 5$$

$$9x^2 - 9x^2 - 7x \geq 5 + 16$$

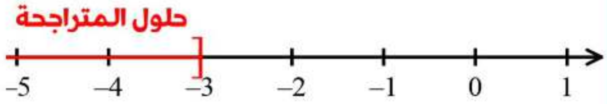
$$-7x \geq 21$$

$$\frac{-7x}{-7} \leq \frac{21}{-7}$$

$$x \leq -3$$

حلول المتراجحة هي كل قيم الأصغر من أو تساوي 3-

التمثيل البياني لحلول المتراجحة السابقة:



المتراجحة 2

$$-3x - 3 > -7x + 5$$

$$-3x + 7x > 5 + 3$$

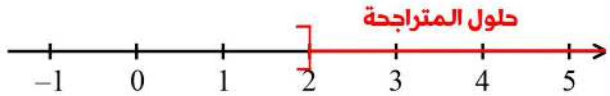
$$4x > 8$$

$$\frac{4x}{4} > \frac{8}{4}$$

$$x > 2$$

حلول المتراجحة هي كل قيم الأكبر تماما من 2

التمثيل البياني لحلول المتراجحة السابقة:



تمرين

1- أُنشر ثم بسط العبارة A حيث:

$$A = (5x-3)^2 - 2(x-7)$$

2- حلّل العبارة B حيث:

$$B = (6x-4)(8x-3) - (6x-4)$$

3- حُل المعادلة: $(-5x-1)(4-2x) = 0$

الحل

1- نشر و تبسيط العبارة A :

$$A = (5x-3)^2 - 2(x-7)$$

$$A = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3 + 3^2 - 2x + 14$$

$$A = 25x^2 - 30x + 9 - 2x + 14$$

$$A = 25x^2 - 32x + 23$$

2- تحليل العبارة B :

$$B = (6x-4)(8x-3) - (6x-4)$$

$$B = (6x-4)(8x-3) - (6x-4) \times 1$$

$$B = (6x-4)[(8x-3) - 1]$$

$$B = (6x-4)(8x-3-1)$$

$$B = (6x-4)(8x-4)$$

3- حل المعادلة:

$(-5x-1)(4-2x) = 0$ معناه:

$-5x - 1 = 0$ أو $4 - 2x = 0$

$-5x = 1$ أو $-2x = -4$

$x = -\frac{1}{5}$ أو $x = 2$

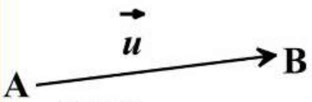
ومنه للمعادلة حلان هما: 2 و $-\frac{1}{5}$

الأشعة والانسحاب

صفحة: حمزة حميدي للرياضيات facebook

الانسحاب ومفهوم الشعاع

A و B نقطتان متمايزتان. الانسحاب الذي يحول A إلى B يعرف شعاعا نرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ (مبدؤه A ونهايته B)



مميزاته:

المنحى: منحاه هو منحى المستقيم (AB) .

الاتجاه: اتجاهه هو من A نحو B .

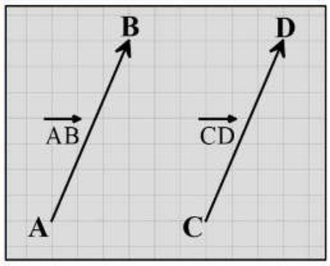
الطويلة: طويلته هي طول القطعة $[AB]$.

(يمكن أن نرمز لهذا الشعاع بالرمز $\vec{u}$ مثلا)

الشعاعان المتساويان

القول عن شعاعين أنهما متساويان يعني أن لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس الطول.

مثال:



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

معناه:

- للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ نفس المنحى، نفس الاتجاه ونفس الطول.
- الانسحاب الذي يحول A إلى B يحول أيضا C إلى D .

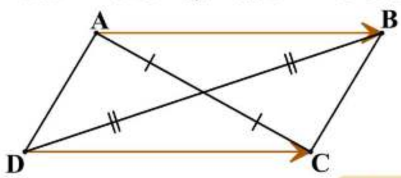
الشعاعان المتساويان ومتوازي الأضلاع

خاصية: A ، B ، C و D أربع نقط كل ثلاثة منها ليست في استقامية.

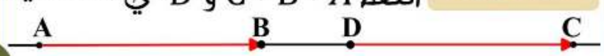
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

ملاحظات: A ، B ، C و D أربع نقط

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ معناه للقطعتين $[AC]$ و $[BD]$ نفس المنتصف.
- إذا كان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$



حالة خاصة: النقط A ، B ، C و D في استقامية

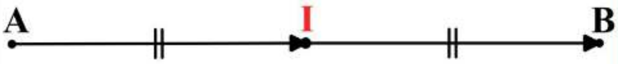


الشعاعان المتساويان ومفهوم منتصف قطعة

خاصية:

A ، B و I ثلاث نقط .

- اذا كان I منتصف $[AB]$ فإن: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
- اذا كان $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن: I منتصف $[AB]$.

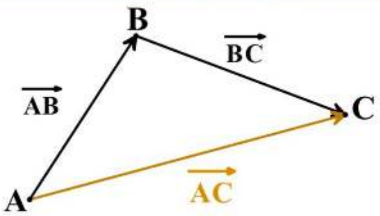


مجموع شعاعين (علاقة شال)

A ، B و C ثلاث نقط .

مجموع الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ هو الشعاع $\overrightarrow{AC}$

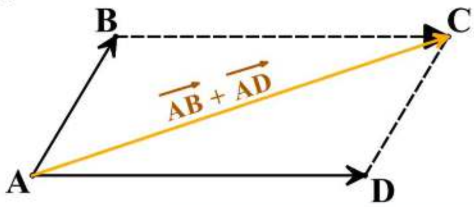
نكتب: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



قاعدة متوازي الأضلاع (مجموع شعاعين)

A ، B و C ثلاث نقط ليست على استقامية.

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ معناه $ABCD$ متوازي أضلاع.



الشعاعان المتعاكسان

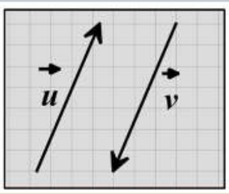
الشعاعان المتعاكسان هما شعاعان لهما نفس المنحى ونفس الطول ويختلفان في الاتجاه.

نقول أن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ متعاكسان ونكتب $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

مجموع شعاعين متعاكسين يساوي الشعاع المعدوم

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

مثال:



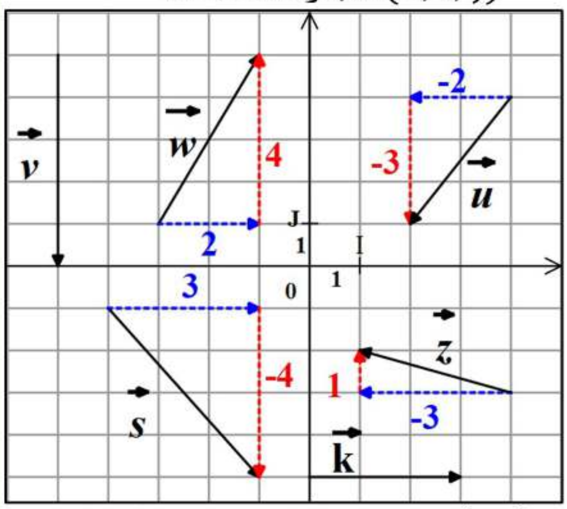
الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعاكسان ونكتب $\vec{u} = -\vec{v}$.

قراءة مركبتي شعاع

نقرأ مَركبتي شعاع بالإزاحتين المتتاليتين اللتين تسمحان بالمرور من مبدأ الشعاع إلى نهايته.

- **الإزاحة الأولى** تكون بالتوازي مع محور الفواصل وتكون موجبة عندما ننتقل نحو اليمين، وسالبة عندما ننتقل نحو اليسار.
- **الإزاحة الثانية** تكون بالتوازي مع محور التراتيب وتكون موجبة عندما ننتقل نحو الأعلى، وسالبة عندما ننتقل نحو الأسفل.

__مثال:__ المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; I; J)$، مبدؤه النقطة O



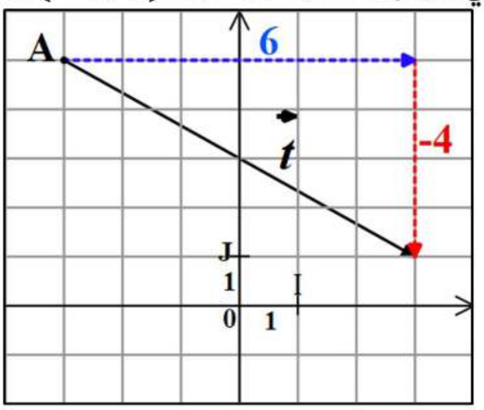
$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$; $\vec{s}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{z}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$; $\vec{k}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$

تمثيل مركبتي شعاع

لتمثيل شعاع علمت مركبتاه $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ ، نختار نقطة كمبدأ لهذا الممثل ثم نحولها بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}$ فنحصل على نقطة نحولها بدورها بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}$ للحصول على نهاية الشعاع المعطى.

__مثال:__ لنمثل الشعاع $\vec{t}\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}$ الذي مبدؤه النقطة A حيث $A(-3;5)$



الشعاعان المتساويان

الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما نفس المركبتين.

شعاعان $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

$\vec{u}=\vec{v}$ معناه: $x=x'$ و $y=y'$

__مثال:__ لتكن النقط A ، B ، C و D حيث:

$A(-4;-1)$ ، $B(3;-1)$ ، $C(-3;2)$ و $D(4;2)$

- هل الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ متساويان($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$)؟

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-4)\\-1-(-1)\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}4-(-3)\\2-2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ لهما نفس المركبتين

إذن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

حساب مركبتي شعاع

إذا كانت A و B نقطتان، إحداثياتهما $(x_A;y_A)$ و $(x_B;y_B)$ على الترتيب في معلم فإن مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هما x_B-x_A و y_B-y_A

مثال:

نعتبر النقطتين $A(-1;3)$ و $B(-2;1)$ من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس

- حساب مركبتي الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$x_B-x_A=-2-(-1)=-1$$

$$y_B-y_A=1-3=-2$$

إذن: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

حساب احداثيتا منتصف قطعة مستقيم

$A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ نقطتان من المستوي و M منتصف القطعة $[AB]$ إذا كانت $(x_M;y_M)$ هما احداثيتا M فإن

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2} \quad \text{و} \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$$

مثال:

$A(2;1)$ و $B(4;-5)$ نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

M منتصف القطعة $[AB]$

- حساب احداثيتي النقطة M

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{2+4}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{1+(-5)}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

إذن: $M(4;-2)$

حساب المسافة بين نقطتين

إذا كانت $A(x_A;y_A)$ و $B(x_B;y_B)$ فإن المسافة بين النقطتين A و B هي

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

مثال:

$A(3;-2)$ و $B(4;1)$ نقطتان من مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس.

- حساب الطول AB

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

$$AB=\sqrt{(4-3)^2+(1-(-2))^2}$$

$$AB=\sqrt{1^2+3^2}$$

إذن: $\boxed{AB=\sqrt{10}}$

حساب احداثيتي نقطة بمعرفة مركبتي شعاع واحداثيتي نقطة اخرى

مثال:

حساب احداثيتي النقطة D بحيث: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

لدينا: $\overrightarrow{AB}\binom{0}{3}$ و $C(-2;\ -2)$

نضع: $D(x_D;y_D)$ ومنه

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-x_C\\y_D-y_C\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}x_D-(-2)\\y_D-(-2)\end{pmatrix}$$

$$x_D+2=0 \qquad y_D+2=3$$

$$x_D=-2 \qquad y_D=3-2$$

$$y_D=1$$

إذن: $D(-2;1)$

جملة معادلتين

تعريف

نسمي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين x و y كل معادلة من الشكل:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حيث a ، b ، c ، a' ، b' و c' أعداد معلومة.

نسمي حلا للجملة: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

كل ثنائية $(x_0; y_0)$ تكون من أجلها معادلتا الجملة محققتين في آن واحد.

طـريقة التـعويض

مثال: نحل الجملة الآتية بطريقة التعويض

$$\begin{cases} x + 2y = 81 & \text{.....(1)} \\ 6x + 11y = 455 & \text{.....(2)} \end{cases}$$

من المعادلة (1) نجد :

$$x = 81 - 2y \quad \text{.....(3)}$$

بتعويض x بالعبارة $81 - 2y$ في المعادلة (2) نجد :

$$6(81 - 2y) + 11y = 455$$

$$486 - 12y + 11y = 455$$

$$-12y + 11y = 455 - 486$$

$$-y = -31$$

$$\boxed{y = 31}$$

بتعويض قيمة y في المعادلة (3) نجد :

$$x = 81 - 2 \times 31$$

$$x = 81 - 62$$

$$\boxed{x = 19}$$

إذن حل الجملة هو الثنائية : $(19; 31)$

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات facebook

طريقة الجمع والتعويض

مثال: نحل الجملة الآتية بطريقة الجمع والتعويض

$$\begin{cases} 2x - 5y = -37 & \text{.....(1)} \\ 6x + 4y = 22 & \text{.....(2)} \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة (1) في العدد (-3) نجد :

$$\begin{cases} -6x + 15y = 111 & \text{.....(3)} \\ 6x + 4y = 22 & \text{.....(2)} \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفا لطرف نجد :

$$\cancel{-6x} + \cancel{6x} + 15y + 4y = 111 + 22$$

$$19y = 133$$

$$y = \frac{133}{19}$$

$$\boxed{y = 7}$$

بتعويض قيمة y في المعادلة (2) نجد :

$$6x + 4 \times 7 = 22$$

$$6x + 28 = 22$$

$$6x = 22 - 28$$

$$6x = -6$$

$$x = \frac{6}{-6}$$

$$\boxed{x = -1}$$

إذن حل الجملة هو الثنائية : $(-1; 7)$

جملة معادلتين

تمرين1:

هل الثنائية $(3;1)$ حل لهذه للجملة:

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+4y=13 \end{cases}$$

حل التمرين1:

بتعويض احداثيتي الثنائية $(2;1)$ في الجملة نجد:

$$\begin{cases} 3+2\times 1=5 \\ 3\times 3+4\times 1=14\neq 13 \end{cases}$$

إذن الثنائية $(2;1)$ ليست حلا للجملة.

تمرين2:

بعدما تم الانتهاء من تبليط أرضية أحد المدرسة القرآنية

تقدم الصديقان محمد و سعيد من أجل تقديم المساعدة،

فتم تكليفهما بشراء مصاحف للطلبة.

ذهب الصديقان لإحدى المكاتب.

- اشترى محمد 60 مصحف من الحجم الصغير

و 50 مصحف من الحجم الكبير بمبلغ $53500\ DA$.

- اشترى سعيد 30 مصحف من الحجم الصغير

و40 مصحف من الحجم الكبير بمبلغ $36500\ DA$.

- ما سعر المصحف الواحد من الحجم الصغير و ما سعر المصحف الواحد من الحجم الكبير ؟

حل التمرين2:

نرمز لسعر المصحف الواحد من الحجم الصغير ب x

نرمز لسعر المصحف الواحد من الحجم الكبير ب y

الجملة المعبرة عن هذه الوضعية هي :

$$\begin{cases} 60x+50y=53500 \quad .....(1) \\ 30x+40y=36500 \quad .....(2) \end{cases}$$

بضرب طرفي المعادلة (2) في العدد-2 نجد :

$$\begin{cases} 60x+50y=53500 \quad .....(1) \\ -60x-80y=-73000 \quad .....(3) \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (1) و (3) طرفا لطرف نجد :

$$\cancel{60x}+50y-\cancel{60x}-80y=53500-73000$$

$$-30y=-19500$$

$$y=\frac{-19500}{-30}$$

$$\boxed{y=650}$$

بتعويض قيمة y في المعادلة (2) نجد :

$$30x+40\times 650=36500$$

$$30x+26000=36500$$

$$30x=36500-26000$$

$$30x=10500$$

$$x=\frac{10500}{30}$$

$$\boxed{x=350}$$

ومنه حل الجملة هو الثنائية : $(350;650)$

إذن :

سعر المصحف الواحد من الحجم الصغير هو : **350DA**

سعر المصحف الواحد من الحجم الصغير هو : **650DA**

الدوال

الدالة الخطية

$$f(x) = ax$$

تعريف

a عدد معطى.

عندما نرفق كل عدد x بالجداء $x \times a$ نقول أننا عرفنا دالة خطية f معاملها a.

- العدد $x \times a$ يسمى صورة العدد x بالدالة f ونرمز لهذه الصورة ب $f(x)$ ونكتب:

$$f(x) = ax$$

- نرمز لهذه الدالة ب: $f: x \longmapsto ax$

مثال: $f(x) = 5x$ أو $f: x \longmapsto 5x$

هي دالة خطية معاملها: $a = 5$

حساب صورة عدد وتعيين عدد علمت صورته

طريقة:

- لحساب صورة العدد x_0 بالدالة f، نعوض x بالعدد x_0 في العبارة $f(x)$ ونجري العمليات.
- لتعيين العدد x الذي صورته m بالدالة f نحل المعادلة $f(x) = m$ ذات المجهول x.

حساب صورة عدد

f دالة خطية حيث: $f(x) = 2x$

- حساب صورة العدد 5 بالدالة f

$$f(5) = 2 \times 5 = 10$$

إذن صورة العدد 5 بالدالة f هي: 10

- حساب صورة العدد -2 بالدالة f

$$f(5) = 2 \times (-2) = -10$$

إذن صورة العدد -2 بالدالة f هي: -10

الدالة التآلفية

$$f(x) = ax + b$$

تعريف

a و b عددان.

عندما نرفق كل عدد x بالعدد $ax + b$ نقول أننا عرفنا دالة تآلفية.

- العدد $ax + b$ يسمى صورة العدد x بالدالة ونرمز لهذه الصورة ب $f(x)$ ونكتب:

$$f(x) = ax + b$$

- a و b هما معاملا الدالة التآلفية.

مثال: $f(x) = 3x - 2$ أو $f: x \longmapsto 3x - 2$

هي دالة تآلفية معاملاها: $a = 3$ و $b = -2$

حساب صورة عدد وتعيين عدد علمت صورته

طريقة:

- لحساب صورة العدد x_0 بالدالة f نعوض x بالعدد x_0 في العبارة $f(x)$ ونجري العمليات.
- لتعيين العدد x الذي صورته k بالدالة f نحل المعادلة $f(x) = k$ ذات المجهول x.

حساب صورة عدد

f دالة تآلفية حيث: $f(x) = 3x + 1$

- حساب صورة العدد 4 بالدالة f

$$f(4) = 3 \times 4 + 1 = 12 + 1 = 13$$

إذن صورة العدد 4 بالدالة f هي: 13

- حساب صورة العدد -1 بالدالة f

$$f(4) = 3 \times (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$$

إذن صورة العدد -1 بالدالة f هي: -2

الدالة الخطية

حساب عدد علمت صورته

g دالة خطية حيث : $g(x) = -7x$

حساب العدد الذي صورته21 :

$$g(x) = 21$$
$$-7x = 21$$
$$x = \frac{21}{-7}$$
$$x = -3$$

إذن العدد الذي صورته 21 بالدالة g هو -3

تعيين دالة خطية انطلاقا من عدد وصورته

لتعيين عبارة دالة تآلفية g معاملها a علما أن $g(m) = n$

نحل المعادلة $am = n$ ذات المجهول a.

مثال:

ايجاد عبارة الدالة g حيث : $g(-2) = -6$

g دالة خطية معناه : $g(x) = ax$

ومنه : $a = \frac{g(x)}{x}$

$$a = \frac{g(-2)}{-2}$$
$$a = \frac{-6}{-2}$$
$$a = 3$$

إذن عبارة الدالة g هي : $g(x) = 3x$

صفحة:حمزة حميدي للرياضيات

facebook

الدالة التآلفية

حساب عدد علمت صورته

k دالة حيث : $k(x) = 2x - 5$

حساب العدد الذي صورته 20:

$$k(x) = 20$$
$$2x - 5 = 20$$
$$2x = 20 + 5$$
$$2x = 25$$
$$x = \frac{25}{2}$$
$$x = 12.5$$

إذن العدد الذي صورته 20 بالدالة k هو 12.5

تعيين دالة تآلفية انطلاقا من عددين وصورتيهما

لتعيين عبارة دالة تآلفية h معاملاها a و b علما أن $h(x_1) = y_1$ و $h(x_2) = y_2$

1- نحسب المعامل a حيث:

$$a = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \quad ; \quad x_1 \neq x_2$$

2- نحسب المعامل b وذلك بحل المعادلة

$h(x_1) = y_1$ أو $h(x_2) = y_2$

مثال:

ايجاد عبارة الدالة h حيث: $h(5) = 38$ و $h(3) = 24$

- حساب المعامل a :

لدينا :

$$a = \frac{h(5) - h(3)}{5 - 3} = \frac{38 - 24}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$\boxed{a = 7}$ ومنه : $h(x) = 7x + b$

- حساب المعامل b :

لدينا :

$$\begin{cases} h(5) = 38 \\ h(5) = 7 \times 5 + b = 35 + b \end{cases}$$

ومنه :

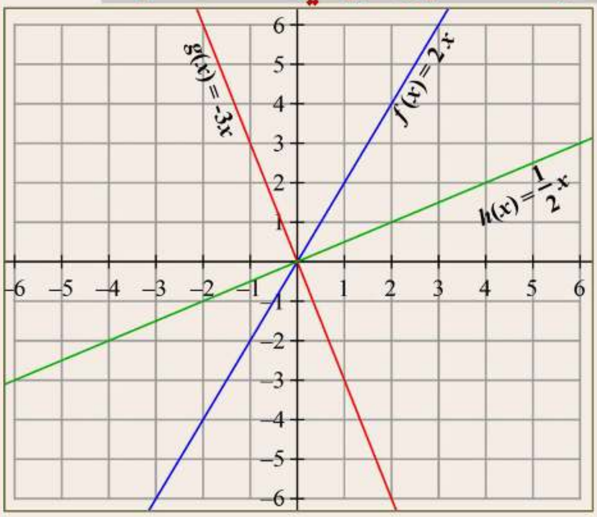
$$35 + b = 38$$
$$b = 38 - 35$$
$$\boxed{b = 3}$$

إذن عبارة الدالة h هي : $h(x) = 7x + 3$

الدوال

الدالة الخطية

قراءة التمثيل البياني لدالة خطية



صورة العدد 1 بالدالة f هي: 2

صورة العدد 2 بالدالة f هي: 4

صورة العدد 1- بالدالة g هي: 3

صورة العدد 4- بالدالة h هي: 2-

العدد الذي صورته 6 بالدالة f هو: 3

العدد الذي صورته 6 بالدالة g هو: 2-

العدد الذي صورته 3- بالدالة h هو: 6-

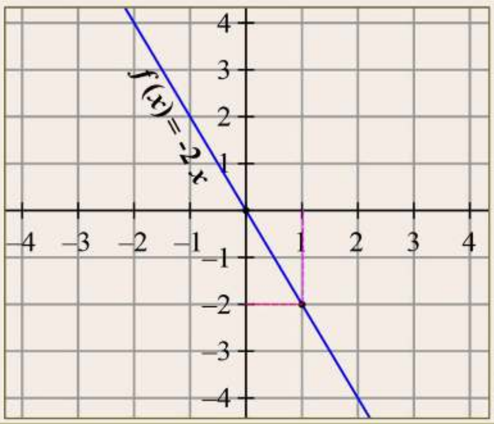
العدد الذي صورته 1 بالدالة h هو: 2-

تمثيل دالة خطية بيانيا

تمثيل الدالة الخطية f بيانيا حيث :

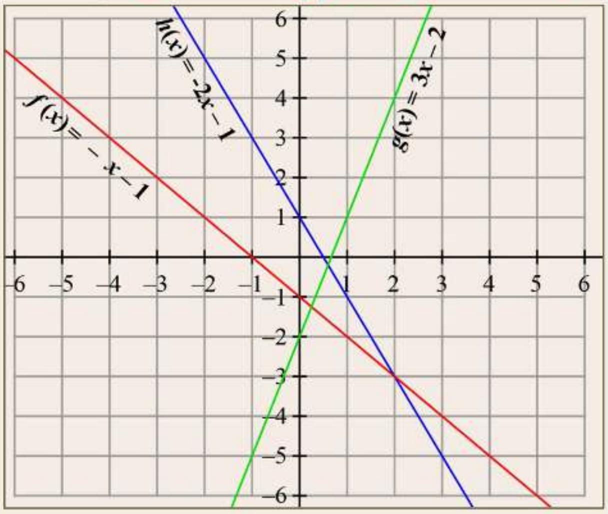
$$f(x) = -2x$$

x	0	1
$f(x)$	0	-2
النقطة	(0;0)	(1;-2)



الدالة التآلفية

قراءة التمثيل البياني لدالة تآلفية



صورة العدد 2- بالدالة f هي: 1

صورة العدد 2 بالدالة f هي: 3-

صورة العدد 2 بالدالة g هي: 4

صورة العدد 1- بالدالة h هي: 3

العدد الذي صورته 5- بالدالة f هو: 4

العدد الذي صورته 5- بالدالة g هو: 1-

العدد الذي صورته 5 بالدالة h هو: 2-

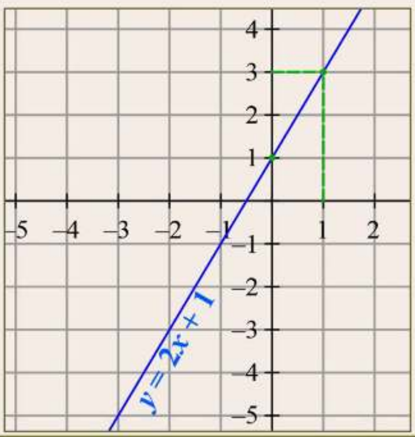
العدد الذي صورته 5- بالدالة h هو: 3

تمثيل دالة تآلفية بيانيا

تمثيل الدالة التآلفية k بيانيا حيث :

$$k(x) = 2x + 1$$

x	0	1
$k(x)$	1	3
النقطة	(0;1)	(1;3)



الدالة الخطية

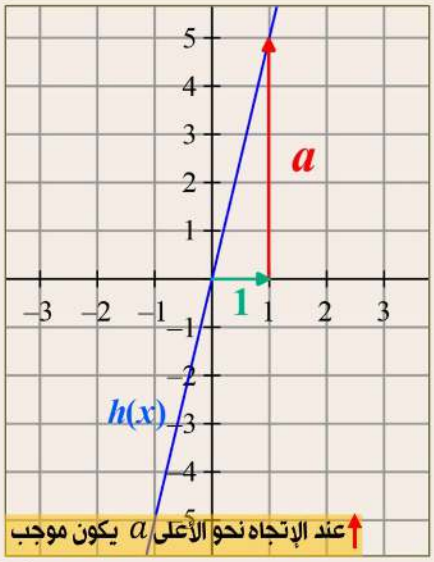
تعيين عبارة دالة خطية انطلاقا من تمثيلها البياني

لتعيين عبارة دالة خطية بيانيا نقرأ من التمثيل البياني قيمة المعامل a.

- العدد a هو معامل توجيه الدالة ولإيجاده :

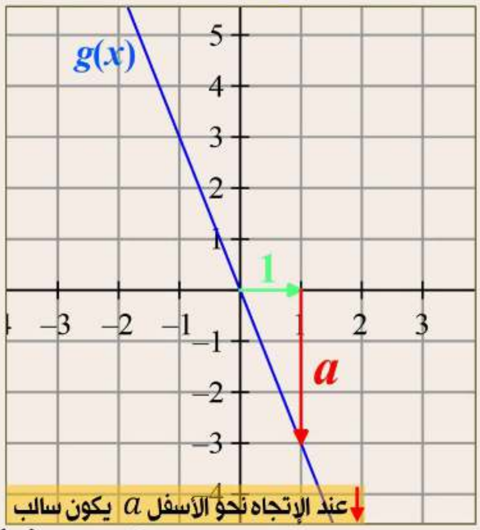
نزيح إنطلاقا من المبدأ بتدريجة واحدة نحو اليمين ثم نصعد أو ننزل في اتجاه مستقيم نحو التمثيل البياني.

تعيين عبارة الدالة h إنطلاقا من تمثيلها البياني



$a = 5$ ومنه : $h(x) = 5x$

تعيين عبارة الدالة g إنطلاقا من تمثيلها البياني



$a = -3$ ومنه : $g(x) = -3x$

الدالة التآلفية

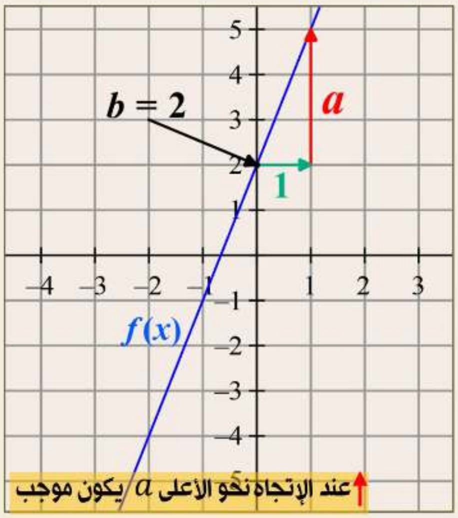
تعيين عبارة دالة تآلفية انطلاقا من تمثيلها البياني

لتعيين عبارة دالة تآلفية بيانيا نقرأ من التمثيل البياني قيمتي المعاملين a و b.

- العدد b هو الترتيب إلى المبدأ
- العدد a هو معامل توجيه الدالة ولإيجاده :

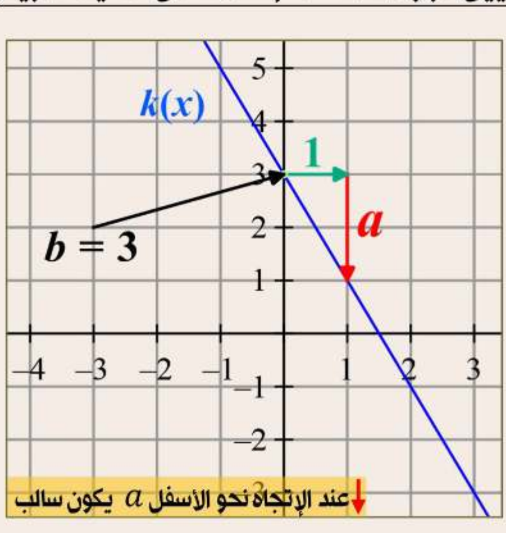
نزيح إنطلاقا من b بتدريجة واحدة نحو اليمين ثم نصعد أو ننزل في اتجاه مستقيم نحو التمثيل البياني.

تعيين عبارة الدالة f إنطلاقا من تمثيلها البياني



$a = 3$ و $b = 2$ ومنه : $f(x) = 3x + 2$

تعيين عبارة الدالة k إنطلاقا من تمثيلها البياني



$a = -2$ و $b = 3$ ومنه: $k(x) = -2x + 3$

الدوال

الدالة الثابتة

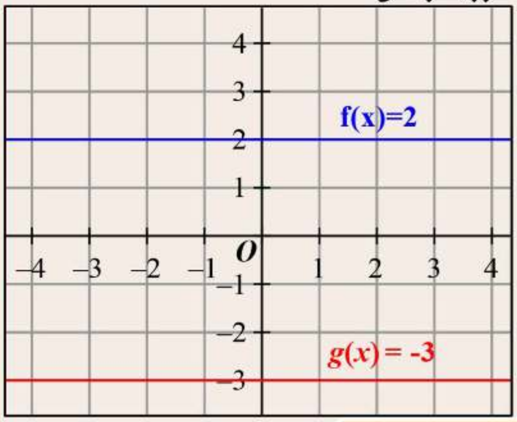
f دالة تآلفية حيث: $f(x) = ax + b$

إذا كان $a = 0$ تصبح الدالة f دالة ثابتة تكتب

من الشكل: $f(x) = b$

● التمثيل البياني للدالة الثابتة عبارة عن مستقيم يوازي محور الفواصل.

مثال:



تطبيقات التناسبية

الدوال الخطية والنسب المئوية

عند أخذ $t\%$ من x يعني ضرب x في $\frac{t}{100}$

الدالة الخطية المرفقة هي: $\boxed{x \to \frac{t}{100}x}$

تمرين:

انعقد مؤتمر دولي للبلدان المصنعة بحضور **40** خبيرا اقتصاديا، حيث نسبة الخبراء العرب في المؤتمر هي 55%

-ما هو عدد الخبراء العرب في هذا المؤتمر؟

الحل:

-حساب عدد الخبراء العرب في المؤتمر:

$$\frac{55}{100} \times 40 = 22$$

عدد الخبراء العرب في المؤتمر هو: **22** خبيرا.

عند تخفيض x ب $t\%$ يعني ضرب x في $1 - \frac{t}{100}$

الدالة الخطية المرفقة هي:

$$\boxed{x \to \left(1 - \frac{t}{100}\right)x}$$

تمرين:

عدد تلاميذ أحد أقسام السنة الرابعة متوسط هو **30**

انخفض عدد التلاميذ ب 10%

- احسب عدد التلاميذ بعد الانخفاض.

الحل:

-حساب عدد التلاميذ بعد الانخفاض:

$$y = \left(1 - \frac{10}{100}\right) \times 28 = \frac{90}{100} \times 30 = 27$$

عدد التلاميذ بعد الانخفاض هو: **27** تلميذ.

عند زيادة x ب $t\%$ يعني ضرب x في $1 + \frac{t}{100}$

الدالة الخطية المرفقة هي:

$$\boxed{x \to \left(1 + \frac{t}{100}\right)x}$$

تمرين:

سعر كتاب هو **700da** ، ازداد سعره ب 13%

- اُحسب سعر الكتاب بعد الزيادة.

الحل:

حساب سعر الكتاب بعد الزيادة:

$$y = \left(1 + \frac{13}{100}\right) \times 700 = \frac{113}{100} \times 700 = 791$$

سعر الكتاب بعد الزيادة هو: **791da**

تمرين:

سعر قميص هو **2500DA**

أصبح سعره بعد التخفيض **2400DA**

- عين الدالة التي تترجم هذه الوضعية.

- ماهي نسبة هذا التخفيض؟

الحل: ليكن x السعر قبل التخفيض و $f(x)$ السعر بعد التخفيض ومنه:

$f(x) = ax$ ومنه: $2400 = a \times 2500$

$a = \frac{2400}{2500} = 0{,}96$ ومنه: $f(x) = 0{,}96x$

حساب نسبة هذا التخفيض: (نرمز لنسبة التخفيض ب p)

2500	100
100%	p

$$p = \frac{100 \times 100}{2500} = 4$$

نسبة هذا التخفيض هي: 4%

المقادير المركبة

- عندما نحسب جداء مقدارين نتحصل على مقدار جداء.
- عندما نحسب حاصل قسمة مقدارين، نتحصل على مقدار حاصل القسمة.

الطاقة الكهربائية: $\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{P} \times \mathrm{t}}$

P : الإستطاعة الكهربائية : (w أو kw)

t: الزمن (h)

وحدة الطاقة الكهربائية : wh أو kwh

السرعة المتوسطة: $\boxed{\mathrm{V_m} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{t}}}$

d: المسافة (m أو km)

t: الزمن (s أو h)

وحدة السرعة المتوسطة: $\mathrm{m/s}$ أو $\mathrm{km/h}$

الكتلة الحجمية: $\boxed{\mathrm{m}_v = \frac{\mathrm{m}}{v}}$

m: الكتلة (g أو kg)

v: الحجم ($\mathrm{cm^3}$ أو $\mathrm{m^3}$)

وحدة الكتلة الحجمية: $\mathrm{g/cm^3}$ أو $\mathrm{kg/m^3}$

مثال:

حساب الكتلة الحجمية لجسم كتلته $2,4kg$ وحجمه $0,01m^3$

$$\mathrm{m}_v = \frac{\mathrm{m}}{v} = \frac{2,4}{0,01} = 240$$

الكتلة الحجمية لهذا الجسم هي: $240kg/m^3$

الدالة الخطية والتناسبية

- جدول قيم دالة خطية هو جدول فيه أعداد السطر الثاني هي صور أعداد السطر الأول بدالة الخطية.
- جدول قيم دالة خطية هو جدول تناسبية.

معامل الدالة الخطية هو معامل تناسبية هذا الجدول.

مثال:

f دالة خطية حيث : $f(x) = -2x$

جدول قيم الدالة f هو جدول تناسبية

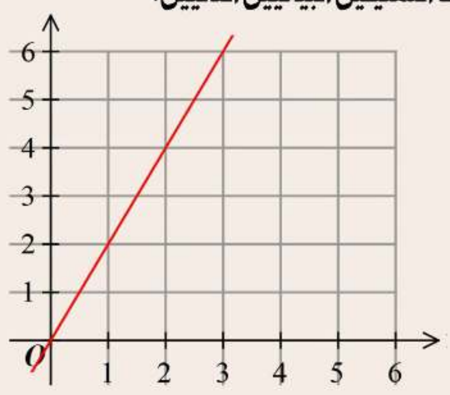
x	-3	-1	0	5
$f(x)$	6	2	0	-10

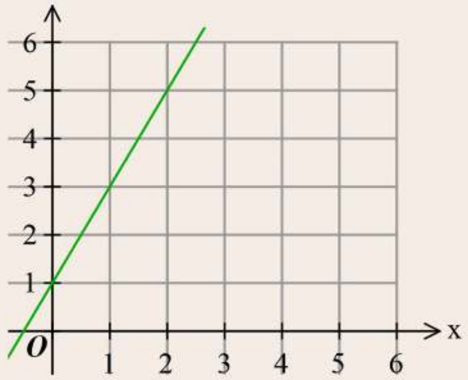
$\times(-2)$

(-2) هو معامل تناسبية هذا الجدول.

تمرين:

إليك التمثيلين البيانيين التاليين:





-أي منهما يمثل وضعية تناسبية؟

الحل:

- البيان الأول يمثل وضعية تناسبية لأنه عبارة عن خط مستقيم يمر من المبدأ.
- البيان الثاني لا يمثل وضعية تناسبية لأنه لا يمر من المبدأ.

تفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بيانيا

- نعني بتفسير حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين بيانيا أن نرفق بهذه الجملة مستقيمين يمثلان الدالتين التآلفيتين المرفقتين بالجملة.
- الثنائية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع هذين المستقيمين، عند وجودها، هي حل هذه الجملة.

مثال:

نعتبر الجملة:

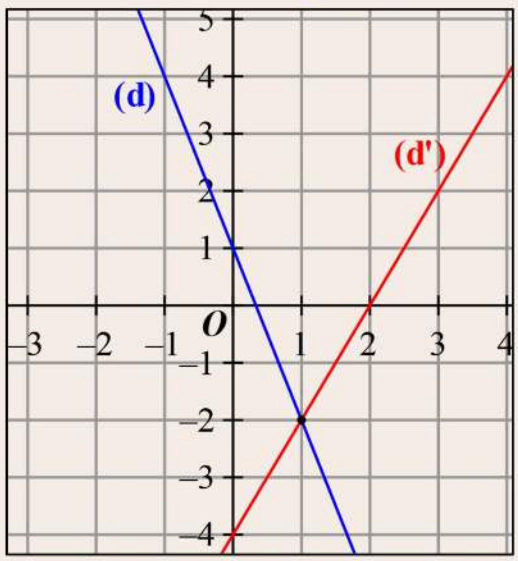
$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

لتفسير حل هذه الجملة بيانيا، نعبر عن y بدلالة x في كلتا المعادلتين فنجد:

$$\begin{cases} y = -3x + 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

في معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O نرسم المستقيمين (d) و (d') المعرفين بمعادلتيهما:

$y = -3x + 1$ و $y = 2x - 4$



حل الجملة هو الثنائية المشكلة من إحداثيتي نقطة تقاطع (d) و (d') ، بقراءة بيانية نجد: $(1; -2)$

إنجاز التمثيل البياني لوضعية يتدخل فيها مقداران أحدهما بدلالة الآخر

يسمح التمثيل البياني لوضعية يتدخل فيها مقداران أحدهما معطى بدلالة الآخر بعد إنجازه من إيجاد قيمة المجهول دون حساب.

تمرين:

تقترح وكالة تجارية للاتصالات الهاتفية للتسديد الشهري صيغتين كالآتي:

- التسعيرة الأولى : $8\ DA$ دينارا للدقيقة.
- التسعيرة الثانية : $4\ DA$ للدقيقة الواحدة و $500\ DA$ كاشتراك شهري .

- بإستعمال التمثيل البياني حدد أفضل تسعيرة للزبون حسب عدد الدقائق المستهلكة خلال شهر واحد

(يؤخذ: $1cm$ يمثل 25 دقيقة على محور الفواصل ، $1cm$ يمثل $200DA$ على محور التراتيب)

الحل

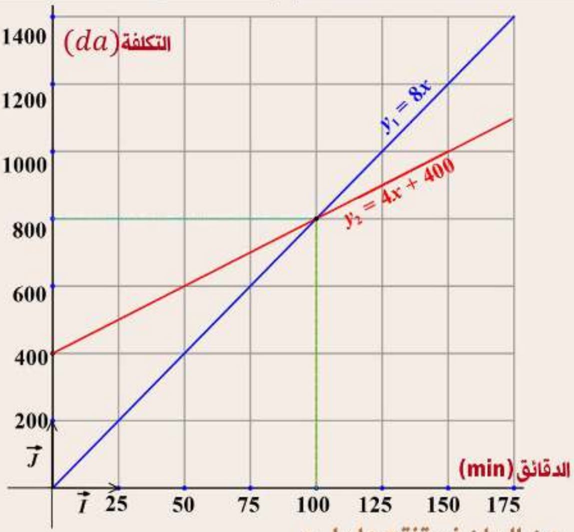
نرمز للتسعيرة الأولى ب y_1 و والتسعيرة الثانية ب y_2

التعبير بدلالة x عن y_1 و y_2 :

$y_1 = 8x$ $\qquad$ $y_2 = 4x + 400$

x	0	100
y_1	0	800
النقطة	(0;0)	(1;800)

x	0	100
y_2	400	800
النقطة	(0;400)	(1;800)



من البيان نستنتج ما يلي:

- إذا كان عدد الدقائق المستهلكة أقل من 100 دقيقة فإن التسعيرة الأولى أفضل من الثانية.
- إذا كان عدد الدقائق المستهلكة أكبر من 100 دقيقة فإن التسعيرة الثانية أفضل من الأولى.