

قواسم عدد طبيعي القاسم المشترك الأكبر الكسور غير القابلة للاختزال - تمارين مع الحل السنة الرابعة متوسط-

التمرين 1: 1- حدد المساواة التي تعبر عن القسمة الإقليدية للعدد 1512 على 21.

2- أكتب $\frac{720}{1512}$ على شكل كسر غير قابل للاختزال.



التمرين 2:

نعتبر العددين الطبيعيين 63 و 105.

1. عين قائمة قواسم كل من هذين العددين.

2. ما هو القاسم المشترك الأكبر لهذين العددين؟ هل هما أوليان فيما بينهما؟ برر.

3. اجعل الكسر $\frac{63}{105}$ غير قابل للاختزال.

التمرين 3:

نعتبر العددين 130 و 286.

1- باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(286;130)$.

2- ليكن الكسر $A = \frac{286}{130}$. أكتب A على شكل كسر غير قابل للاختزال.

المسألة 1:

يعرض بائع زهور للبيع 75 زهرة نرجس و 90 زهرة أقحوان.

1. باستعمال كل الزهور، هل يمكنه تشكيل 5 باقات متماثلة؟ 6 باقات؟

2. ما هو أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل

الزهور؟ ما هو عدد زهور النرجس و زهور الأقحوان في كل باقة؟



المسألة 2:

نعتبر العددين 1317 و 3073.

1. أحسب القاسم المشترك الأكبر للعددين 1317 و 3073.

2. يشارك تلاميذ في مسابقة في الرياضيات حسب الفرق. يوجد 3073

تلميذة و 1317 تلميذ. يجب تكوين فرق متماثلة (لها نفس عدد التلاميذ و نفس التوزيع

بين البنات و الأولاد) بتعيين كل مشارك في فريق من الفرق.

أ) ما هو أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن تشكيلها؟

ب) عين في هذه الحالة تشكيلة كل فريق. (عدد البنات و عدد الأولاد).

حل التمرين 1

1. $1512 = 21 \times 72 + 0$. حاصل القسمة هو 72 بينما الباقي 0.

2. لدينا: $1512 = 21 \times 72$ و $720 = 10 \times 72$ و بالتالي:

$$\frac{720}{1512} = \frac{10 \times 72}{21 \times 72} = \frac{10}{21}$$

الكسر $\frac{10}{21}$ غير قابل للاختزال.



حل التمرين 2

1. قواسم العدد 63 هي: 1, 3, 7, 9, 21, 63.

قواسم العدد 105 هي: 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105.

2. نلاحظ من القائمتين أن قواسمهما المشتركة هي: 1, 3, 7, 21.

و بالتالي فإن:

$PGCD(105; 63) = 21$. و بما أن $PGCD(105; 63) \neq 1$ فإن العددين 105 و 63 ليسا

أولييين فيما بينهما.

3. لدينا: $105 = 21 \times 5$ و $63 = 21 \times 3$ و منه: $\frac{63}{105} = \frac{21 \times 3}{21 \times 5} = \frac{3}{5}$.

الكسر $\frac{3}{5}$ غير قابل للاختزال.

حل التمرين 3

1.

	2	
286	130	26
	26	0

← الحاصل

← القاسم و المقسوم

← الباقي

$$286 = 130 \times 2 + 26$$

$$130 = 26 \times 5 + 0$$

آخر باق غير معدوم للقسمة الإقليدية المتتالية هو 26

و بالتالي: $PGCD(286; 130) = 26$

2. حسب نتيجة السؤال الأول لدينا: $286 = 26 \times 11$ و $130 = 26 \times 5$ و منه:

$$A = \frac{286}{130} = \frac{26 \times 11}{26 \times 5} = \frac{11}{5}$$

الكسر $\frac{11}{5}$ غير قابل للاختزال.





1. عدد الزهور المعروضة للبيع هو: $165 = 90 + 75$. لدينا: $165 : 5 = 33$.
و بالتالي يمكن البائع تشكيل 5 باقات متماثلة بحيث تشمل كل باقة 15 زهرة
نرجس و 18 زهرة أقحوان لأن: $15 = 75 : 5$ و $18 = 90 : 5$.

في حين: $165 : 6 = 27.5$

و بالتالي لا يمكن للبائع تشكيل 6 باقات متماثلة (العدد 27.5 ليس عددا طبيعيا).
2. إذا رمزنا إلى أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال
كل الزهور بالرمز n فيجب أن يقسم n كلا من العددين 75 و 90 و بالتالي فإن n
قاسم مشترك للعددين 75 و 90 و بالإضافة إلى ذلك فإن n هو أكبر هذه القواسم.
إذن n هو القاسم المشترك الأكبر للعددين 75 و 90. لنحسب باستعمال مثلا
خوارزمية إقليدس $PGCD(90, 75)$.

$$90 = 75 \times 1 + 15$$

$$75 = 15 \times 5 + 0$$

إذن أكبر عدد ممكن من الباقات المتماثلة التي يمكن تشكيلها باستعمال كل الزهور هو: 15.
لدينا: $75 : 15 = 5$ و $90 : 15 = 6$ و بالتالي فعدد زهور النرجس في كل باقة هو: 5 بينما عدد
زهور الأقحوان في كل باقة هو: 6.
نجد في كل باقة 11 زهرة.

1. لنحسب باستعمال مثلا خوارزمية إقليدس $PGCD(3073, 1317)$.

$$3073 = 1317 \times 2 + 439$$

$$1317 = 439 \times 3 + 0$$

$$PGCD(3073, 1317) = 439$$

2. (أ) بما أن كل الفرق متماثلة و أن كل تلميذ سواء كان بنتا أو ولدا ينتمي إلى إحدى
الفرق فإن عدد الفرق يقسم كلا من عدد الأولاد و عدد البنات أي يقسم 3073 و 1317.
و بما أننا نبحث عن أكبر عدد من الفرق فإن هذا العدد هو القاسم المشترك الأكبر للعددين
3073 و 1317 أي 439. و بالتالي فإن أكبر عدد ممكن من الفرق المتماثلة التي يمكن
تشكيلها هو 439.

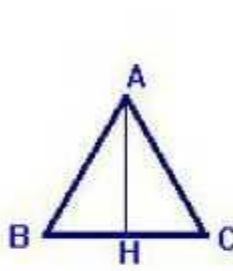
(ب) عدد البنات في كل فريق هو: $3073 \div 439 = 7$.

عدد الأولاد في كل فريق هو: $1317 \div 439 = 3$.

يتشكل كل فريق من 10 تلاميذ من بينهم 7 بنات و 3 أولاد.

الحساب على الجذور

التمرين 1: علما أن مساحة قاعة مربعة الشكل هي $18,49 m^2$ عين بالمتر طول ضلعها.



التمرين 2: ABC مثلث متقايس الأضلاع و لتكن النقطة H منتصف القطعة $[BC]$.

1. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC = 7 cm$.
2. أحسب الطول AH إذا علمت أن $BC = a cm$.

التمرين 3: نعتبر العددين A و B بحيث:

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80} \quad \text{و} \quad B = (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$$

1. أكتب العددين A و B على الشكل $a + b\sqrt{5}$ حيث a و b عدنان طبيعيان.
2. عين القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A .
3. أحسب قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B .

نهدف إلى إثبات أن العدد $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا. إذا كان $\sqrt{2}$ عددا ناطقا فإنه يكتب على شكل كسر غير قابل للاختزال $\frac{p}{q}$ حيث p و q عدنان طبيعيان



غير معدومين.

1. تحقق أن $p^2 = 2q^2$ ثم استنتج أن p^2 عدد زوجي.
2. بين أنه إذا كان p زوجيا يكون p^2 زوجيا و إذا كان p فرديا يكون p^2 فرديا ثم استنتج أن العدد p زوجي.
3. بوضع $p = 2p'$ و بإتباع نفس منهجية السؤال السابق أثبت أن العدد q زوجي.
4. اشرح لماذا أجوبة السؤالين 2 و 3 مناقضة للمعطيات ثم استنتج أن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.

إذا رمزنا إلى طول ضلع القاعدة بالرمز x يكون لدينا: $x^2 = 18,49$ لأن مساحة المربع هي x^2 . للمعادلة $x^2 = 18,49$ حلان هما $-4,3$ و $4,3$. وعلما أن الأطوال أعداد موجبة فإن $x = 4,3$. و هكذا طول ضلع القاعدة المربعة الشكل هو $4,3m$.



حل التمرين 2

المثلث AHC قائم في النقطة H . لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس:

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \text{ و } AC^2 = AH^2 + HC^2$$

بما أن H منتصف $[BC]$ فإن: $HC = \frac{BC}{2}$ و بالتالي: $HC^2 = \frac{BC^2}{4}$

و علما أن: $AC = BC$ فإن: $AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4}$ أي: $AH^2 = \frac{3BC^2}{4}$

$$1. \text{ لدينا: } AH^2 = \frac{3 \times 7^2}{4} \text{ و منه: } AH = \sqrt{\frac{3 \times 7^2}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \text{ لدينا: } AH^2 = \frac{3 \times a^2}{4} \text{ و منه: } AH = \sqrt{\frac{3 \times a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

و علما أن: $AC = BC$ فإن: $AH^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{4}$ أي: $AH^2 = \frac{3BC^2}{4}$

$$1. \text{ لدينا: } AH^2 = \frac{3 \times 7^2}{4} \text{ و منه: } AH = \sqrt{\frac{3 \times 7^2}{4}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$2. \text{ لدينا: } AH^2 = \frac{3 \times a^2}{4} \text{ و منه: } AH = \sqrt{\frac{3 \times a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \sqrt{25} + \sqrt{20} + \sqrt{80}$$

$$A = 5 + \sqrt{4 \times 5} + \sqrt{16 \times 5}$$

و

$$A = 5 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$$

$$A = 5 + 6\sqrt{5}$$

$$B = (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$$

$$B = (\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 2 + 2^2 - ((\sqrt{5})^2 - 1)$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 5 + 1$$

$$B = 5 + 4\sqrt{5}$$

2. باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $A = 18,41640\dots$

إذن 18,42 هي القيمة المدورة إلى 10^{-2} للعدد A لأن $6 \geq 5$.

3. باستعمال آلة حاسبة علمية نتحصل على: $B = 13,94427\dots$

إذن 13,94 قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان للعدد B .



1. بوضع: $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ يكون لدينا: $\frac{p^2}{q^2} = 2$ و منه: $p^2 = 2q^2$. بما أن p^2

يكتب على الشكل: $2k$ فإن p^2 عدد زوجي.

2. * نفرض أن p زوجي و منه: $p = 2k$ حيث k عدد طبيعي و بالتالي: $p^2 = 4k^2$

و هكذا $p^2 = 2(2k^2) = 2k'$ مع $k' = 2k^2$. إذن: p^2 عدد زوجي.

* نفرض أن p فرديا و منه: $p = 2k + 1$ حيث k عدد طبيعي

و بالتالي: $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

و هكذا $p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$ مع $k' = 2k^2 + 2k$. إذن: p^2 عدد فردي.

و منه لو كان p عددا فرديا لكان p^2 عددا فرديا و بما أن p^2 زوجي فإن p زوجي.

3. بما أن p زوجي نضع $p = 2p'$ و منه: $p^2 = 4p'^2$ و بعد التعويض في العلاقة:

$$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow 2p'^2 = q^2$$

و باستعمال نتائج السؤال الثاني نستنتج أن العدد q زوجي لأنه في نفس وضعية p .

4. استنتجنا في السؤالين 2 و 3 أن العددين p و q زوجيان و بالتالي فإن العدد 2

قاسم مشترك لهما و هذا يعني أن الكسر $\frac{p}{q}$ غير قابل للاختزال و هذا مناقض للفرضية " $\frac{p}{q}$

كسر غير قابل للاختزال " إذن $\sqrt{2}$ ليس عددا ناطقا.

