الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية/

مديرية التربية لولاية قسنطينة — الثانوية : الحرية

المادة : رياضيات — المستوى : ثالثة ثانوي

الشعبة : تسيير وَ إقتصاد — المعامل : 5

الإختبار الثاني — اللقب وَ الإسم: — المدة: 2 سا

التمرين الأول (5ن):

1) ليكن كثير الحدود $P(x)$ حيث : $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.

- حلّي في $\mathbb{R}$ المعادلة : $P(x) = 0$. **(0.5ن).**

2) إستنتجي حلول المعادلات التالية :

أ- $(\ln x)^4 - 8(\ln x)^2 - 9 = 0$. **(0.75ن).**

ب- $[\ln(\ln x)]^4 - 8[\ln(\ln x)]^2 - 9 = 0$. **(0.75ن).**

جـ- $(\log x)^4 - 8(\log x)^2 - 9 = 0$. **(0.75ن).**

د- $e^{4x} - 8e^{2x} - 9 = 0$. **(0.5ن).**

3) حلّي في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $9e^{-4x} + 8e^{-2x} - 1 \le 0$. **(1.75ن).**

التمرين الثاني (4ن):

نعتبر المتتالية الهندسية (v_n) ذات الأساس e^3 وَ الحدّ الأول $v_0 = 2$. (e أساس اللوغاريتم النيبيري).

1) أحسبي بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. **(1ن).**

2) نعتبر المتتاليتين (u_n) وَ (w_n) المعرّفتين من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي :

$w_n = 6 - 4n + 2e^{3n}$ وَ $u_n = w_n - v_n$.

- بيّني أنّ : المتتالية (u_n) حسابية ، حدّدي أساسها r وَ حدّها الأول u_0 . **(1ن).**

3) أثبتي أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $6 + 2 - 2 + \dots + 6 - 4n = (n+1)(6-2n)$. **(1ن).**

4) إستنتجي المجموع T_n بدلالة n حيث : $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$. **(1ن).**

التمرين الثالث (4ن): نعتبر الدالة g المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = (\ln x)^2 + \ln x - 6$.

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد وَ المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.($\ln$ رمز اللوغاريتم النيبيري).

1) أ- حلّي في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة : $g(x) = 0$ ثُمّ فسّري النتيجة هندسيًا. **(0.75ن+0.25ن).**

ب-حلّلي $g(x)$ إلى جداء عاملين. **(0.5ن).**

جـ- حلّي في المجال $]0;+\infty[$ المتراجحة : $2\ln x + 1 \ge 0$. **(0.5ن).**

2) أحسبي $g'(x)$ وَ إستنتجي إتجاه تغيّر الدالة g . **(0.25ن+0.75ن).**

3) بيّني أنّ المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف يُطلب تعيين إحداثياتها. **(0.25ن+0.25ن+0.25ن+0.25ن).**

التمرين الرابع (7ن): نعتبر الدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x) = e^x(e^x - 2)$.

1)أحسبي نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وَ عند $+\infty$.**(0.5ن+0.5ن).**

2) أدرسي إتجاه تغيّر الدالة f ، ثُمّ شكّلي جدول تغيّراتها. **(0.5ن+0.75ن+0.75ن).**

3) أكتبي معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الممثّل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها $\ln 2$. **(1ن).**

4) أرسمي (T) وَ (C_f) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. **(0.5ن+1ن).**

5) أ- جِدي دوال أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. **(1ن).**

ب- أحسبي مساحة الحيّز المحدّد بـــ (C_f) وَ (xx') وَ المستقيمان ذو المعادلتين : $x = -2$ وَ $x = -1$. **(0.5ن).**

ملاحظات هامة جداً:

1) يُمنع منعاً باتاً التشطيب وَ الكتابة تكون إما بالأزرق أَوْ الأسود .

2) لا تكتبي وَ لا تُلطخي هذه الورقة لأنّكِ ستُرجعيها مع ورقة الإجابة .

3) يُمنع إستعمال الآلة الحاسبة ذات الشاشة التي يزيد عرضها عن $2cm$.

بالتوفيق ـــــ الإثنين 6 مارس 2023 ـــــ الأستاذة زعتر آمال

تنقيط	الإجابة النموذجية

* التمرين الأول: $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ (05)

1) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة: $P(x)=0$

بوضع $x^2 = X$ فإن: $P(X)=0 \Rightarrow X^2-8X-9=0$

$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(-9) = 64+36 = 100 = 10^2 > 0$

يوجد حلان هما إذن:

* $X_1 = x_1^2 = \frac{8-10}{2} = -1 < 0$; مستحيل لأن $x^2 \geq 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ 0,25

* $X_2 = x_2^2 = \frac{8+10}{2} = 9 > 0 \Rightarrow |x_2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_2' = -3 \\ x_2'' = +3 \end{cases}$ 0,25

ومنه: $S = \{-3; 3\}$

2) استنتاج حلول المعادلات:

ⓐ $(\ln x)^4 - 8(\ln x)^2 - 9 = P(\ln x) = 0$

ⓐ شرط صحة: يجب أن يكون $x > 0$ أي $x \in]0;+\infty[$ 0,25

و $P(\ln x)=0$ و $P(x)=0$ متكافئتان

وحسب السؤال 1 فإن: $\begin{cases} \ln x_1 = -3 \Rightarrow x_1 = e^{-3} \\ \ln x_2 = +3 \Rightarrow x_2 = e^3 \end{cases}$ 0,25 0,25

$\Rightarrow S = \{e^{-3}; e^3\}$

ⓑ $[\ln(\ln x)]^4 - 8[\ln(\ln x)]^2 - 9 = 0 = P[\ln(\ln x)]$

ⓑ شرط صحة: يجب أن يكون $\ln x > 0$ أي $x > e^0 = 1$ ومنه $x \in]1;+\infty[$ 0,25

حسب السؤال 1: $P(\ln(\ln x))$ و $P(x=0)$ متكافئتان

$\Rightarrow \ln(\ln x_1) = -3 \Rightarrow \ln x_1 = e^{-3} \Rightarrow x_1 = e^{e^{-3}}$ 0,25

$\ln(\ln x_2) = 3 \Rightarrow \ln x_2 = e^3 \Rightarrow x_2 = e^{e^3}$ 0,25

ومنه: $S = \{e^{e^{-3}}; e^{e^3}\}$

ⓒ $(\log x)^4 - 8(\log x)^2 - 9 = 0 = P(\log x)$

ⓒ شرط صحة: يجب أن يكون $x > 0$ أي $x \in]0;+\infty[$ 0,25

$P(\log x)=0$ و $P(x)=0$ متكافئتان

حسب 1: $\log x_1 = \frac{\ln x_1}{\ln 10} = -3 \Rightarrow \ln x_1 = -3\ln 10 \Rightarrow \ln x_1 = \ln 10^{-3}$

ومنه: $x_1 = 10^{-3}$ 0,25

* $\log x_2 = \frac{\ln x_2}{\ln 10} = 3 \Rightarrow \ln x_2 = 3\ln 10 = \ln 10^3 \Rightarrow x_2 = 10^3$ 0,25

ومنه: $S = \{10^{-3}; 10^3\}$

ⓓ $e^{4x} - 8e^{2x} - 9 = 0 = P(e^x)$

$P(e^x)=0$ و $P(x)=0$ متكافئتان حسب 1

$\Rightarrow e^{x_1} = -3 < 0$; مستحيل لأن $e^x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ 0,25

* $e^{x_2} = 3 > 0 \Rightarrow x_2 = \ln 3$ 0,25

$\Rightarrow S = \{\ln 3\}$

3) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $9e^{-4x} + 8e^{-2x} - 1 \leq 0$

$\frac{9}{e^{4x}} + \frac{8}{e^{2x}} \times \frac{e^{2x}}{e^{2x}} - 1 \times \frac{e^{4x}}{e^{4x}} \leq 0$

تكافئ: $\frac{-e^{4x}+8e^{2x}+9}{e^{4x}} \leq 0$

نضرب في (-1): $\frac{e^{4x}-8e^{2x}-9}{e^{4x}} = \frac{P(e^x)}{e^{4x}} \geq 0$ 0,25

$P(X) = a(X-X_1)(X-X_2) = (X+1)(X-9)$

$X = e^{2x} \Rightarrow P(e^{2x}) = (e^{2x}+1)(e^{2x}-9)$

$= (e^{2x}+1)(e^x+3)(e^x-3)$ 0,25

إعداد جدول الإشارة فيما يلي:

x	$-\infty$		$\ln 3$		$+\infty$
$e^{2x}+1$ (0,25)		+		+	
e^x+3 (0,25)		+		+	
e^x-3 (0,25)		−	0	+	
e^{4x} (0,25)		+		+	
$P(e^x)/e^{4x}$		−	0	+	

$\Rightarrow S = [\ln 3; +\infty[$ 0,25

* التمرين الثاني: (V_n) متتالية هندسية حيث: $\begin{cases} V_0 = 2 \\ q = e^3 \end{cases}$ (04)

1) حساب S_n بدلالة n:

$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = \text{الحد الأول} \times \frac{\text{الأساس}^{\text{عدد الحدود}} - 1}{\text{الأساس} - 1}$ 0,25

$\Rightarrow S_n = V_0 \times \frac{q^{n-0+1}-1}{q-1} = 2 \times \frac{(e^3)^{n+1}-1}{e^3-1}$ 0,25

ومنه: $\boxed{S_n = 2\left(\frac{e^{3n+3}-1}{e^3-1}\right)}$ 0,5

2) $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $W_n = 6-4n+2e^{3n}$; $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $W_n - V_n = U_n$

* إثبات أن (U_n) حسابية ; $r=?$; $U_0=?$

حسب المعطيات فإنه يمكن كتابة عبارة الحد العام لـ V_n: $V_n = V_0 \times q^n = 2\times(e^3)^n = 2e^{3n}$

ومنه: $W_n = 6-4n+2e^{3n}$

$= 6-4n+V_n$

$\Rightarrow U_n = W_n - V_n = 6-4n$. 0,25

(U_n) حسابية إذا كان ($U_{n+1} = U_n + r$) 0,25

$U_n = 6-4n \Rightarrow U_{n+1} = 6-4(n+1) = 6-4n-4 = U_n - 4$

ومنه (U_n) حسابية أساسها $r=-4$ 0,25

وحدها الأول U_0 حيث $U_0 = 6-4\times0$ أي $U_0 = 6$ 0,25

3) إثبات أن: $S'_n = 6+2-2+\dots+6-4n = (n+1)(6-2n)$

حسب ما سبق فإن: $U_n = 6-4n$ ومنه: $n=0 \Rightarrow U_0 = 6$

$n=1 \Rightarrow U_1 = 6-4 = 2$

$n=2 \Rightarrow U_2 = 6-8 = -2$

أي: $S'_n = U_0+U_1+\dots+U_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$ 0,25 0,25

$\Rightarrow S'_n = \frac{n-0+1}{2}(U_0+U_n) = \frac{n+1}{2}(6+6-4n)$ 0,25

$= \frac{n+1}{2}(12-4n) = \frac{(n+1)\times 2(6-2n)}{2}$

$\boxed{S'_n = (n+1)(6-2n)}$ 0,25

4) استنتاج T_n بدلالة n حيث: $T_n = W_0+W_1+\dots+W_n$

لدينا: $U_n = W_n - V_n$ ومنه: $W_n = U_n + V_n$ أي: 0,25

$T_n = U_0+V_0+U_1+V_1+\dots+U_n+V_n$

$= (U_0+U_1+\dots+U_n) + (V_0+V_1+\dots+V_n)$

$= S_n + S'_n = 2\left(\frac{e^{3n+3}-1}{e^3-1}\right) + (n+1)(6-2n)$ 0,25+0,25

الإجابة النموذجية	تنقيط

* التمرين الثالث: (06ن)

$g(x)=(\ln x)^2+\ln x-6$; $D_g=]0,+\infty[$

1- أ- حل المعادلة: $g(x)=0$

نضع: $X=\ln x$ فإن: $g(x)=0 \Rightarrow X^2+X-6=0$

$\Delta=1-4(-6)=5^2 \Rightarrow X_1=\ln x_1=\frac{-1-5}{2}=-3$

$\Rightarrow x_1=e^{-3}$ 0,25

$X_2=\ln x_2=\frac{-1+5}{2}=2 \Rightarrow x_2=e^{2}$ 0,25

$S=\{e^{-3};e^{2}\}$ 0,25

تفسير النتيجة هندسيا: $(C_g)\cap(xx')=\{e^{-3};e^{2}\}$ 0,25

ب- تحليل $g(x)$ إلى جداء عاملين:

نعلم أن: $aX^2+bX+c=a(X-X_1)(X-X_2)$

$\Rightarrow g(x)=(\ln x+3)(\ln x-2)$ 0,5

جـ- حل المتراجحة: $2\ln x+1\geq 0$ في $\mathbb{R}_+^*$:

$2\ln x+1\geq 0 \Rightarrow \ln x\geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x\geq e^{-1/2}$ 0,25

(S): $S=[e^{-1/2},+\infty[$ 0,25

2) حساب $g'(x)$: g معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ كمجموع وتركيب حيث:

$g'(x)=2(\ln x)'(\ln x)^{2-1}+(\ln x)'=\frac{2}{x}\ln x+\frac{1}{x}$

$g'(x)=\frac{2\ln x+1}{x}$ 0,25

* استنتاج اتجاه تغير g:

حسب ج- فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2\ln x+1)$، لأن $x>0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}_+^*$: 0,25

$0 \quad - \quad e^{-1/2} \quad + \quad +\infty$

$g'(x)<0 \Rightarrow x\in]0;e^{-1/2}[$

لـ g متناقصة تماما على $]0;e^{-1/2}[$ 0,25

$g'(x)>0 \Rightarrow x\in]e^{-1/2},+\infty[$

لـ g متزايدة تماما على $[e^{-1/2},+\infty[$ 0,25

3) إثبات أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف:

g' معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وعليه حيث:

$g''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln x-1}{x^2}$

$=\frac{1-2\ln x}{x^2}$; $g''(x)=0 \Rightarrow 1-2\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1/2 \Rightarrow x=\sqrt{e}$ 0,5

$-\infty \quad - \quad \sqrt{e} \quad + \quad +\infty$ 0,25

إذن $g''(x)$ انعدمت من أجل $x=\sqrt{e}$ وتغيرت إشارتها، أي أن (C_g) يقبل نقطة انعطاف عندها

وعليه $g(\sqrt{e})=(\ln\sqrt{e})^2+\ln\sqrt{e}-6=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-6$ 0,25

هي نقطة الانعطاف $A(\sqrt{e};-\frac{21}{4})$ 0,25

* التمرين الرابع: (07ن)

$f(x)=e^x(e^x-2)=e^{2x}-2e^x$; $D_f=\mathbb{R}$

1) حساب نهايات f عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$:

* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x(e^x-2)=0$ 0,25

لـ $y=0$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(-\infty)$ 0,25

* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x(e^x-2)=+\infty$ 0,25

لـ احتمال وجود مقارب مائل بجوار $(+\infty)$ 0,25

2) دراسة اتجاه تغير f: f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كجداء حيث:

$f'(x)=e^x(e^x-2)+e^x\times e^x=e^{2x}-2e^x+e^{2x}$ 0,25

$\Rightarrow f'(x)=2e^{2x}-2e^x=2e^x(e^x-1)$ 0,25

* $f'(x)=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=\ln 1=0$; $e^x>0$

$-\infty \quad - \quad 0 \quad + \quad +\infty$ 0,25

$x\in]-\infty,0[\Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ f متناقصة تماما على $]-\infty,0[$ 0,25

$x\in]0,+\infty[\Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ f متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ 0,25

* جدول تغيرات f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	0 ↘	$f(0)$	↗ $+\infty$

$f(0)=1(-1)=-1$. 0,5 +0,25

3) كتابة معادلة المماس (T) عند $x_0=\ln 2$:

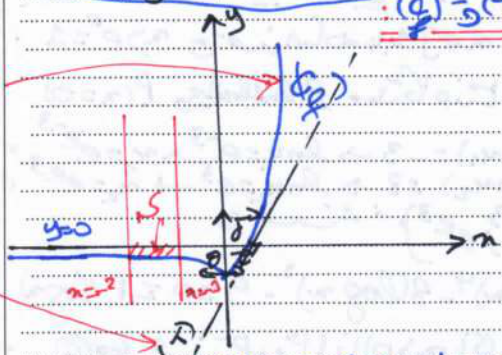
$(T): y=f'(\ln 2)(x-\ln 2)+f(\ln 2)$ 0,25

$f'(\ln 2)=2\times 2(2-1)=4$ 0,25

$f(\ln 2)=2\times(2-2)=0$ 0,25

$\Rightarrow (T): y=4x-4\ln 2$ 0,25

4) رسم (T) و (C_f):



0,5

5) أ. إيجاد دالة أصلية لـ f على $\mathbb{R}$: لدينا:

$f(x)=e^x(e^x-2)=e^{2x}-2e^x$ 0,5

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+C$; $C\in\mathbb{R}$ 0,5

ب- حساب المساحة S: بما أن (C_f) يقع تحت (xx') في المجال $[-2;-1]$ فإن:

$S=-\int_{-2}^{-1}(f(x)-0)\,dx=-[F(x)]_{-2}^{-1}=F(-2)-F(-1)$ 0,25

$=\frac{1}{2}e^{-4}-2e^{-2}-\frac{1}{2}e^{-2}+2e^{-1}$

$S=(\frac{1}{2}e^{-4}-\frac{5}{2}e^{-2}+2e^{-1})$; (u.a) 0,25

$\Rightarrow S\approx 0,4$; (u.a)

انتهى