



فيفري 2023

المستوى: الثالثة رياضيات

المدة : ساعتين.

فرض الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 1

الشكل في الورقة المرفقة هو التمثيل البياني (C_f) للدالة f المعرفة على المجال $[0; 1]$ بـ: $f(x) = \frac{3x}{2x+1}$ و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على \mathbb{N} بعدها الأول $u_0 = \frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) مثل على محور الفواصل الحدود $u_0; u_1; u_2; u_3$ للمتتالية (u_n) دون حسابها. مبرزا خطوط التمثيل.
(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) (أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

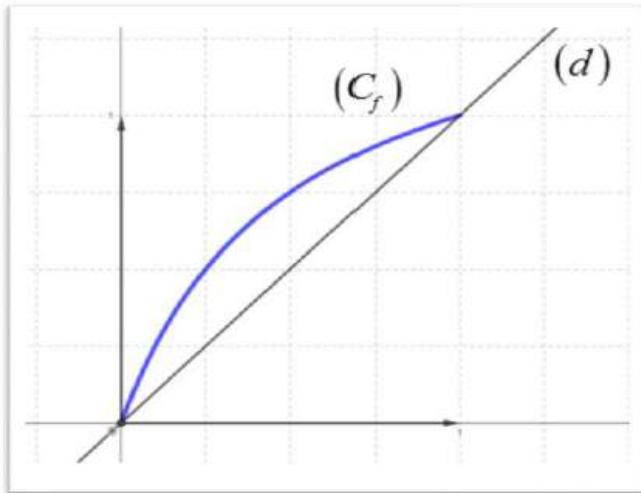
(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على \mathbb{N} كمايلي: $v_n = \frac{1-u_n}{2u_n}$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n والجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ و $S_n = v_0 + 2v_1 + 2^2v_2 + \dots + 2^n v_n$.

الملحق: يرجع مع ورقة الاجابة

الإسم واللقب:

القسم:



التمرين 2

$$\begin{cases} v_1 - v_3 = \frac{7}{16} \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{27}{64} \end{cases} : \text{بحيث } N \text{ معرفة على } N$$

(1) أ- اثبت ان $v_2 = \frac{3}{4}$ والاساس $q = \frac{3}{4}$

ب- اكتب v_n بدلالة n

(2) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = -\frac{2}{3}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$

أ- احسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3

ب- برهن انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n > -2$

ج- ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة

(3) المتتالية العددية (w_n) المعرفة على N بـ : $w_n = u_n - v_n$

أ- اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $w_n = -2$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب نهايتها

(4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

التمرين 3

a, n و b أعداد صحيحة نسبية حيث : $a = 2n + 9$ و $b = 5n + 14$

(1) بين أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 17.

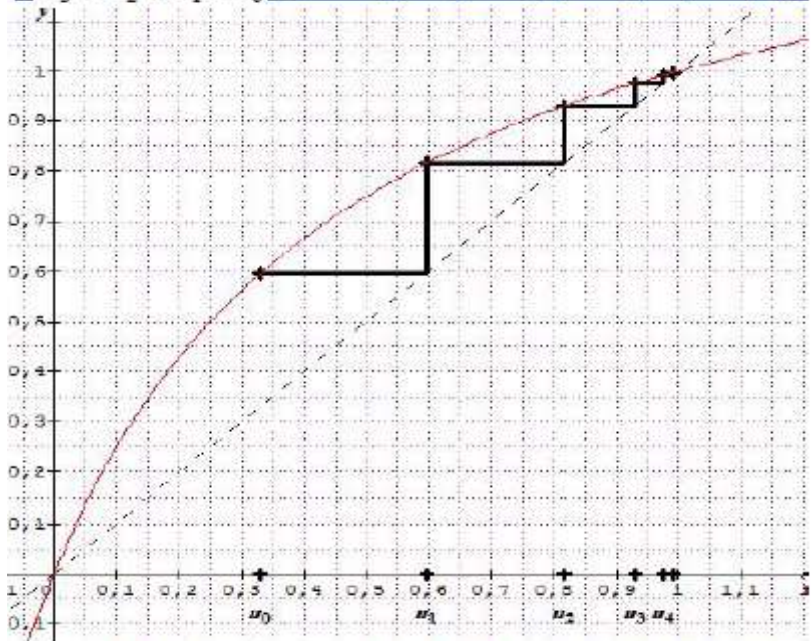
(2) عين القيم الممكنة لـ $\text{pgcd}(a; b)$.

(3) عين حسب قيم n ، $\text{pgcd}(a; b)$.

(4) أوجد حلا خاصا لـ (E) بحيث : $1190x + 561y = 17$ (E)

بالتوفيق

التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	<p>(1) <u>تمثيل على محور الفواصل الحدود $u_0; u_1; u_2; u_3$:</u></p>  <p>(ب) <u>وضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:</u> المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة</p> <p>(2) <u>اثبات من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 < u_n < 1$</u> نبرهن بالبرهان بالتراجع</p> <p>[من أجل $n = 0: 0 < u_0 < 1$ محققة لان: $u_0 = \frac{1}{3}$</p> <p>[نفرض أن n عدد طبيعي $0 < u_n < 1$ صحيحة ونبرهن ان: $0 < u_{n+1} < 1$</p> <p>لدينا: $0 < u_n < 1$ و $f(0) = 0$; $f(1) = 1$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ بما أن f متزايدة تماما على $[0;1]$ فإن $f(0) < f(u_n) < f(1)$ ومنه: $0 < u_{n+1} < 1$.</p> <p>من [و [نستنتج حسب البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 < u_n < 1$</p> <p>(ب) <u>دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتاج أنها متقاربة</u></p> <p>لدينا: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n^2 + 2u_n}{2u_n + 1} = \frac{-2u_n(u_n - 1)}{2u_n + 1}$</p> <p>بما أن: $0 < u_n < 1$ فإن $u_n - 1 < 0$ ، ومنه: $u_{n+1} - u_n > 0$ نستنتج أن (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو عدد حقيقي ℓ لأنها محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما.</p> <p><u>** حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:</u></p> $\frac{-2\ell(\ell-1)}{2\ell+1} = 0 \text{ يكافئ } \ell = \frac{3\ell}{2\ell+1} \text{ يكافئ } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3u_n}{2u_n + 1}$	

ومنه $l = 0$ (مرفوض) أو $l = 1$ (مقبول محدودة من الأعلى

ومتزايدة تماما) ، ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(3) أنيبين أن (v_n) متتالية هندسية :

لدينا:

$$v_{n+1} = \frac{1 - u_{n+1}}{2u_{n+1}} = \frac{1 - \frac{3u_n}{2u_n + 1}}{2 \left(\frac{3u_n}{2u_n + 1} \right)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1 - u_n}{2u_n} \right) = \frac{1}{3} v_n$$

$$v_0 = \frac{1 - u_0}{2u_0} = 1 \quad q = \frac{1}{3} \text{ هندسية أساسها } q \text{ وحدها الأول}$$

ب) كتابة v_n بدلالة n واستنتاج u_n بدلالة n :

$$v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

لدينا $u_n = \frac{1}{2v_n + 1}$ ومنه $u_n = \frac{1}{2 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 1}$ ، $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n و الجداء P_n :

$$S_n = v_0 + 2v_1 + 2^2 v_2 + \dots + 2^n v_n$$

$$= \left(\frac{2}{3} \right)^0 + \left(\frac{2}{3} \right)^1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{3} \right)^n$$

هو مجموع $n+1$ حدا لمتتالية هندسية حدها الأول $\left(\frac{2}{3} \right)^0 = 1$

$$S_n = 1 \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 3 - 3 \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} \text{ ومنه: } \frac{2}{3} \text{ وأساسها}$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$= v_0 \times (v_0 q) \times (v_0 q^2) \times \dots \times (v_0 q^n)$$

$$= (v_0)^{n+1} \times q^{0+1+2+\dots+n} = (1)^{n+1} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

(1) إثبات أن $V_n = \frac{3}{4}$ و $q = \frac{3}{4}$:

V_1, V_2 و V_3 حدود متتابعة لمتتالية هندسية معناه : $V_1 \cdot V_3 = V_2^2$ ومنه $V_2 = \frac{3}{4}$ و $q = \frac{3}{4}$

(ب) كتابة V_n بدلالة n : $V_n = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

(2) حساب الحدود : $U_1 = -1$; $U_2 = -\frac{5}{4}$; $U_3 = -\frac{23}{16}$

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > -2$

(ج) اتجاه تغير المتتالية (U_n) :

ومن المتتالية (U_n) متناقصة تماما $U_{n+1} - U_n = -\frac{U_n+2}{4} < 0$

لدينا المتتالية (U_n) متناقصة تماما و $U_n > -2$ ومنه المتتالية (U_n) متقاربة. (3)

أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = -2$

(ب) استنتاج U_n بدلالة n :

ومنه : $U_n = -2 + \frac{4}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -2$

(4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

$$S_n = n - 6 \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1 \right]$$

التمرين 2

التمرين 3

(1) تبين أن كل قاسم مشترك لـ a و b يقسم 17 :

نضع $d = \text{pgcd}(a; b)$ ومنه d/a و d/b ومنه $d/5a-2b$ أي $d/17$

(2) تعيين القيم الممكنة لـ $\text{pgcd}(a; b)$:

$d \in \{1; 17\}$ أي $d \in D_{17}$ معناه

(3) تعيين حسب قيم n , $\text{pgcd}(a; b)$:

إذا كان $\text{pgcd}(a; b) = 17$ فإن : $n = 17k + 21$; $k \in \mathbb{Z}$

إذا كان $\text{pgcd}(a; b) = 1$ فإن : $n \neq 17k + 21$; $k \in \mathbb{Z}$

(4) إيجاد حلا خاصا لـ (E) بحيث : $1190x + 561y = 17$ (E)

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد :