الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية
فرض الثلاثي الثاني
الشعبة: 3رياضي

مدرية التربية لولاية عنابة
ثانوية القديس أوغستان

مادة: الرياضيات — المدة: ساعة ونصف

I ـ (U_n) و (V_n) متتاليتين عدديتين حقيقيتين معرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} U_0 = e + e^{-1} \\ U_{n+1} = \dfrac{eU_n + e^{-1}V_n}{e + e^{-1}} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} V_0 = e - e^{-1} \\ V_{n+1} = \dfrac{eV_n + e^{-1}U_n}{e + e^{-1}} \end{cases}$$

❶ أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{e^2-1}{e^2+1}$ حيث : $w_n = U_n - V_n$ ، وعين حدها الأول .

❷ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (w_n) ، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

❸ أثبت أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما والمتتالية (V_n) متزايدة تماما .

❹ استنتج أن المتتاليتان (U_n) و (V_n) تتقاربان نحو نفس النهاية l .

❺ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e - e^{-1} \leq V_n \leq U_n \leq e + e^{-1}$.

II ـ نعتبر المتتالية العددية (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $t_n = U_n + V_n$.

❶ أثبت أن المتتالية (t_n) ثابتة ، ثم استنتج قيمة العدد الحقيقي l .

❷ بين أن : $U_n = \frac{1}{2}(t_n + w_n)$ وأن : $V_n = \frac{1}{2}(t_n - w_n)$.

❸ استنتج عبارة الحد العام لكل من المتتاليتين (U_n) و (V_n) .

III ـ نعتبر المجموع S_n و الجداء P_n حيث :

$$\begin{cases} S_n = (U_0^2 - V_0^2) + (U_1^2 - V_1^2) + (U_2^2 - V_2^2) + \ldots + (U_{n-1}^2 - V_{n-1}^2) \\ P_n = (U_0^2 - V_0^2) \times (U_1^2 - V_1^2) \times (U_2^2 - V_2^2) \times \ldots \times (U_n^2 - V_n^2) \end{cases}$$

❶ أحسب بدلالة n المجموع S_n .

❷ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

❸ أثبت أن :

$$P_n = \sqrt[4^{n+1}]{\left(\frac{e^2-1}{e^2+1}\right)^{n^2+n}}$$