الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية وهران | ثانوية محمد بن عثمان الكبير

الشعبة: رياضي | المستوى: الثالث ثانوي

فرض في مادة: الرياضيات | نوفمبر 2023 | المدة: ساعة وربع

I)

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$(x-1)^2y'-(x-2)y=0 \quad ... \quad (E)$$

1) تحقق أنه يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل: $\ln|y|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}=c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

(يشير الرمز $\ln$ إلى دالة اللُوغاريتم النيبيري)

2) استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$:

3) أوجد الحل الخاص $g(x)$ للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق: $g(0)=-1$.

II)

نعتبر الدّالةَ العدديّة f المعرفةَ على المجال $\mathbb{R}$ بالعبارةِ الجبرية الموالية: $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$

(C_f) المنحنى البياني الممثلُ للدالةِ f في المستوي المنسوبِ إلى المعلم المتعامد والمتجانسِ $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب نهايات الدالة f على الحدود المفتوحة للمجموعة $\mathbb{R}$.

2) هل الدالة f مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ ؟ علل الإجابة.

3) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ من اليسار، فسر هندسيا النتيجة.

4) أ) أوجد مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}-\{1\}$، (اعتمادا على الجزء الأول).

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f.

5) بوضع : $u=\frac{1}{x-1}$ بين أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-ex\right]=\lim\limits_{u\to 0}\left[e\frac{e^u-u-1}{u}\right]$، ثم استنتج قيمتها وفسر هذه النتيجة هندسيا.

6) بين أن المنحنى (C_f) لا يقبل أية نقطة انعطاف.

7) أنشئ المنحنى (C_f) ومقارباته في المعلم المذكور. (وحدة الطول هي السنتيمتر).

III)

بالاعتماد على المنحنى البياني (C_f) ناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة:

$$e^{\frac{x}{x-1}}-\frac{m}{x-1}-m=0$$

تمرين: دارسة دالة تحوي الأس النيبيري.

الجزء الأول:

نعتبر المعادلة التفاضلية (E) بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$ لدينا:

$$(x-1)^2y'-(x-2)y=0 \quad \ldots \quad (E)$$

1) التحقق أنه يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل: $\ln|y|-\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}=c$ حيث c عدد حقيقي ثابت:

(يشير الرمز $\ln$ إلى دالة اللوغاريتم النيبيري)

وهذا يكون بالطريقة الموالية:

$$\ln|y|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}=c \Leftrightarrow \ln|y|=\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+c$$

وباشتقاق الطرفين بالنسبة للمتغير x نجد أن:

$$\left[\ln|y|\right]'=\left[\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+c\right]' \Leftrightarrow \frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+0=\frac{x-2}{(x-1)^2}$$

أي أن: $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$ أي أن: $(x-1)^2y'=(x-2)y$ وهذا يعني أن :

$(x-1)^2y'-(x-2)y=0$ ومنه فإن:

$$\ln|y|-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}=c \Leftrightarrow (x-1)^2y'-(x-2)y=0$$

2) استنتاج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$:

إنطلاقا من العبارة: $\ln|y|-\ln|x-1|-\dfrac{1}{x-1}=c$ لدينا: $\ln|y|=\ln|x-1|+\dfrac{1}{x-1}+c$

فمن الواضح حينئذ أن:

$$\ln|y|=\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+c \Leftrightarrow |y|=e^{\ln|x-1|+\frac{1}{x-1}+c}=e^{\ln|x-1|}e^{\frac{1}{x-1}+c}=|x-1|e^{\frac{1}{x-1}+c}$$

وجدنا إذاً : $|y|=|x-1|e^{\frac{1}{x-1}+c}$ أي أن : $y=(x-1)e^{\frac{1}{x-1}+c}$ أو : $y=-(x-1)e^{\frac{1}{x-1}+c}$

فنكتفي بوضع : $|y|=|x-1|e^{\frac{1}{x-1}+c}\ldots(1)$

3) إيجاد الحل الخاص $g(x)$ للمعادلة التفاضلية (E) الذي يحقق: $g(0)=-1$:

الحل الخاص $g(x)$ يحقق المعادلة (1) وعليه لدينا:

لكن $g(0)=-1$ يحقق العلاقة $y=(x-1)e^{\frac{1}{x-1}+c}$ فقط:

ومنه: $g(0)=(0-1)e^{\frac{1}{0-1}+c}=-e^{-1+c}=-1=-e^{0}\Rightarrow c=1$:

إذن الحل الخاص $g(x)$ هو : $g(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x-1}+1}$ أو بالأحرى هو : $g(x)=(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}$

الجزء الثاني:

نعتبر الدّالة العدديّة f المعرفةَ على المجال $\mathbb{R}$ بالعبارةِ الجبرية الموالية: $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$ أي:

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)e^{\frac{x}{x-1}} & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

(C_f) المنحنى البياني الممثلُ للدالةِ f في المستوي المنسوبِ إلى المعلم المتعامد والمتجانسِ $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حساب نهايات الدالة f على الحدود المفتوحة للمجموعة $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}=-\infty\times e=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}=+\infty\times e=+\infty$$

2) استمرارية الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$:

نقوم بحساب النهاية: $\lim_{x\to1}f(x)$:

$$\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}1}(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}=0.\lim_{x\xrightarrow{<}1}e^{\frac{x}{x-1}}=0.0=0$$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}=0.\lim_{x\xrightarrow{>}1}e^{\frac{x}{x-1}}=0.(+\infty)$$

نرفع عدم التعين باستعمال مثلا التغير في المتغير الموالي: $\frac{1}{x-1}=t$ إذن لما:

$x\xrightarrow{>}1\Leftrightarrow t\to+\infty$ إذن:

$$\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}1}(x-1)e^{\frac{x}{x-1}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}e^{1+t}=e\frac{e^{t}}{t}=+\infty$$

إذن لقد وجدنا أن: $\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)=0=f(0)$ وهذا ما يفسر أن الدالة f مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ من اليسار، ووجدنا أن: $\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)=+\infty$ وهذا ما يفسر أن الدالة f غير مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ من اليمين، وبصفة عامة الدالة f غير مستمرة عند النقطة ذات الفاصلة $x=1$ لأن: $\lim_{x\xrightarrow{<}1}f(x)\neq\lim_{x\xrightarrow{>}1}f(x)$.

وكذلك نفسر النتيجة $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = +\infty$ بأن المنحنى (C_f) يقبل مقارب عمودي من اليمين معادلته: $x = 1$.

3) دراسة قابلية f عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار، ثم نفسر هندسيا النتيجة:

نقوم بحساب النهاية: $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{(x-1)e^{\frac{x}{x-1}} - 0}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} e^{\frac{x}{x-1}} = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار و $f'(0^-) = 0$.

التفسير الهندسي: محور الفواصل هو مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$ من اليسار.

4) أ) إيجاد مشتقة الدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$، (اعتمادا على الجزء الأول):

5) على المجال $\mathbb{R} - \{1\}$ الدالة f هي حل للمعادلة التفاضلية (E) ومنه:

$$(x-1)^2 f'(x) - (x-2) f(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2} f(x)$$

$$f'(x) = \frac{x-2}{(x-1)^2} (x-1) e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1} e^{\frac{x}{x-1}}$$

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

إشارة المشتقة:

هي من إشارة $\dfrac{x-2}{x-1}$ ومنه جدول الإشارة هو:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0 ‖ $+\infty$	↘	$f(2) = e^2$	↗	$+\infty$

6) بوضع : $u = \dfrac{1}{x-1}$ نبين أن: $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-ex\right] = \lim\limits_{u\to0}\left[e\dfrac{e^{u}-u-1}{u}\right]$، ثم نستنتج قيمتها ونفسر هذه النتيجة هندسيا:

لدينا من الواضح أن: $|x|\to+\infty \Leftrightarrow u\to 0$ وأيضا $x = \dfrac{u+1}{u}$:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-ex\right] = \lim_{|x|\to+\infty}\left[(x-1)e^{\frac{x}{x-1}} - ex\right]$$
$$= \lim_{u\to0}\left[\frac{1}{u}e^{1+u} - e\frac{u+1}{u}\right] = \lim_{u\to0}\left[\frac{1}{u}ee^{u} - e\frac{u+1}{u}\right]$$
$$= \lim_{u\to0} e\left[\frac{1}{u}e^{u} - \frac{u+1}{u}\right] = \lim_{u\to0} e\left[\frac{e^{u}-u+1}{u}\right]$$

حساب قيمتها:

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-ex\right] = \lim_{u\to0}\left[e\frac{e^{u}-u-1}{u}\right] = \lim_{u\to0} e\left[\frac{e^{u}-1}{u}-1\right] = e(1-1) = 0$$

التفسير الهندسي: المستقيم الذي معادلته: $y = ex$ هو خط مقارب للمنحنى (C_f).

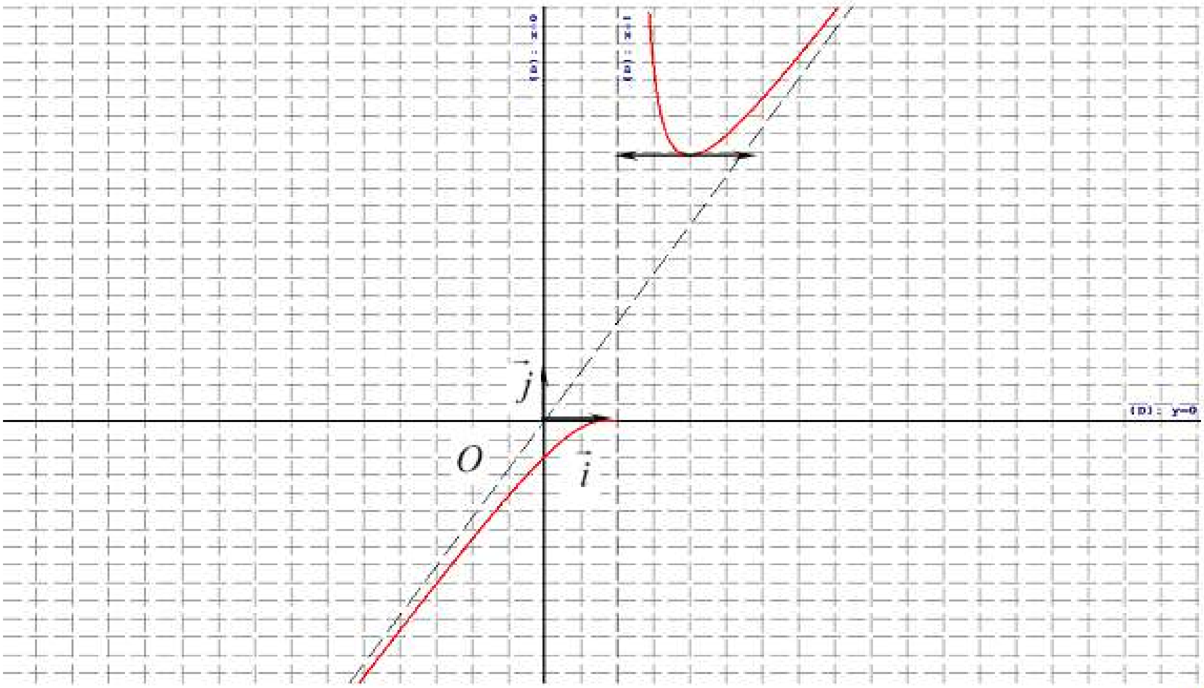
7) نبين أن المنحنى (C_f) لا يقبل أية نقطة انعطاف:

نقوم بحساب المشتقة الثانية للدالة f على $\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f'(x) = \frac{x-2}{x-1}e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$f''(x) = \frac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}} + \frac{x-2}{x-1}\times\frac{(x-1)-x}{(x-1)^2}e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$f''(x) = \left[\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x-2}{(x-1)^3}\right]e^{\frac{x}{x-1}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}e^{\frac{x}{x-1}}$$

المشتقة الثانية لا تغير إشارتها إلا عند النقطة الغير مستمرة التي يستحيل أن تكون نقطة انعطاف إذن المنحنى (C_f) لا يقبل أي نقطة انعطاف، وهو محدب لما: $x \prec 1$ ومقعر لما: $x \succ 1$.

8) أنشاء المنحنى (C_f) ومقارباته في المعلم المذكور. (وحدة الطول هي السنتيمتر):



الجزء الثالث:

بالاعتماد على المنحنى البياني (C_f) نناقش تبعا لقيم الوسيط الحقيقي m عدد الحلول :

نعيد كتابة المعادلة لربطها بالمنحنى (C_f):

$$e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{m}{x-1} - m = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} - m\left[\frac{1}{x-1} + 1\right] = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} - \frac{mx}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{x}{x-1}} = \frac{mx}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)e^{\frac{x}{x-1}} = mx \Leftrightarrow f(x) = mx$$

مناقشة حلول المعادلة في المجال $\mathbb{R}-\{1\}$:

حلول المعادلة هي نقط تقاطع بالمنحنى (C_f) مع المستقيمات التي تشمل المبدأ ذات معاملات التوجيه m : أي مستقيمات دورانية.

لمـــا: $m \prec 0$: يوجد حل وحيد.

لمـــا: $0 \prec m \prec e$: لا توجد حلول.

لمـــا: $e \prec m \ll +\infty$: يوجد حلين.

لمـــا: $m = +\infty$: حل وحيد.