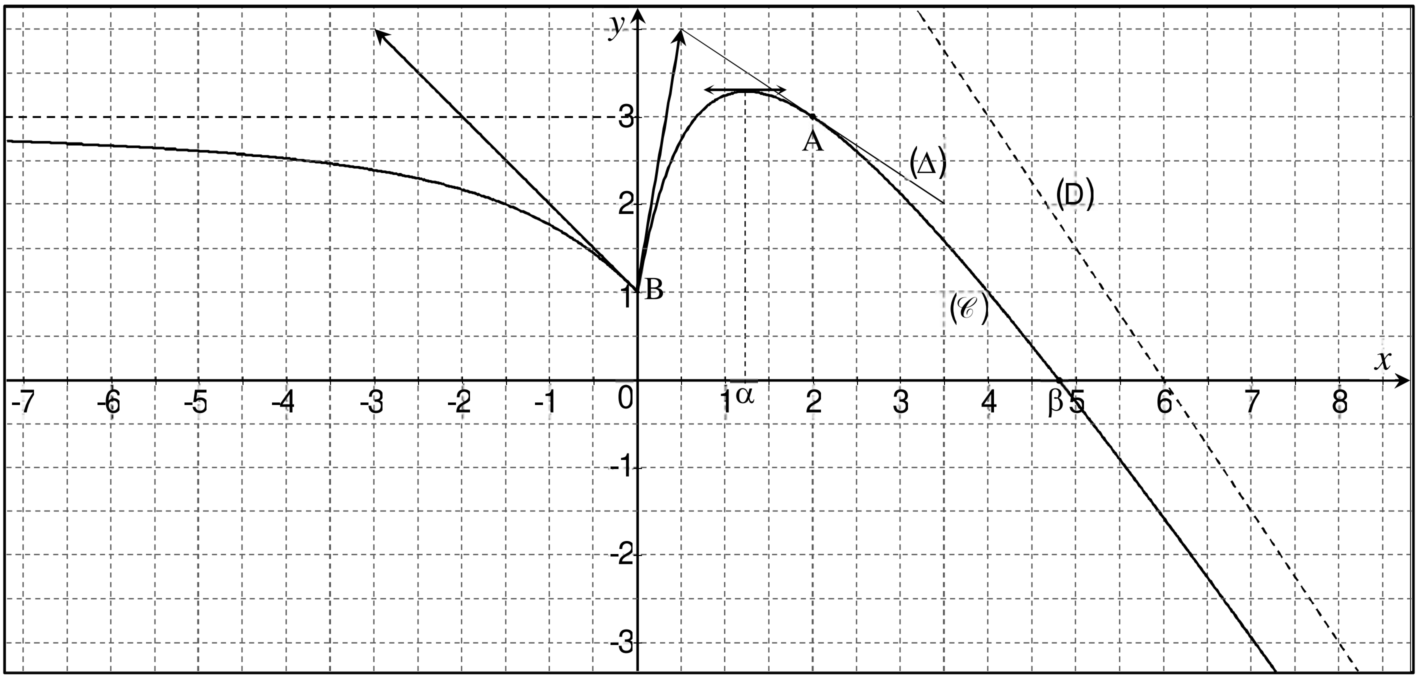
| الثانوية الخاصّة: الرّجاء والتفوّق (بوزريعة) | فرض | الموسم الدراسي: 2022/2023م |
| --- | --- | --- |
| المستوى: ثالثة ثانوي "علوم تجريبية" | الفصل الأول | المدة: ساعتان (2سا) |
| المادة: رياضيات | | إعداد: عبد المطلب |

**تمرين 1 (10 نقاط)**

في الشّكل المرفق: التمثيل البياني $(\mathscr{C})$ للدالة $f$ المعرّفة والمستمرة على $\mathbb{R}$. $(D)$ المستقيم المقارب المائل لـ$(\mathscr{C})$ في جوار $+\infty$، والمستقيم الذي معادلته $y=3$ مقارب لـ$(\mathscr{C})$ في جوار $-\infty$، $(\Delta)$ هو المماس لـ$(\mathscr{C})$ عند النقطة $A(2\,;3)$، كما يوجد نصفي مماسين عند النقطة $B(0\,;1)$، ومماسا موازيا لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$.




**1)** اكتب معادلة المستقيم المقارب المائل $(D)$، ومعادلة المماس $(\Delta)$.

**2)** عيّن النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{f(x)+1}}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+\dfrac{3}{2}x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)+x\right)$.

**3)** عيّن النهايات التالية: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)-1}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ و $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(-x+4)-3}{x-2}$.

**4)** بيّن أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة B. ماذا نسمي النقطة B ؟

**5)** أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$.

**6)** عيّن القيمة المقرّبة للعدد $f(2{,}001)$، باستعمال التقريب التآلفي للدالة $f$.

**7)** بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ يطلب إعطاء حصرا له سعته $0{,}5$، ثم ادرس إشارة $f(x)$.

**8)** عيّن قيم الوسيط الحقيقي $m$، حتى تقبل المعادلة $f(x)=m+1$ ثلاثة حلول متمايزة.

**9)** $g$ الدالة العددية المعرّفة بـ: $g(x)=ax+b-\sqrt{x^2+c}$، حيث $a$ ، $b$ و $c$ ثلاثة أعداد حقيقية.

أ) عيّن قيم العدد الحقيقي $c$ حتى تكون الدالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$، من أجل كل حالة مما يلي: $a<0$ ، $a=1$ و $a>1$.

ج) إذا علمت أنّ $f(x)=g(x)$ على المجال $]-\infty\,;0]$، وبالاستعانة بقيم $f(0)$ ، $f'_g(0)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$.

**تمرين 2 (10 نقاط)**

**I -** $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $g(x)=a+\dfrac{b}{x^2-2x-3}$ ، حيث $a$ و $b$ عددين حقيقيين.

**1)** بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ ، فإنّ: $g'(x)=\dfrac{-2b(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$.

**2)** عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$، بحيث المنحني الممثل للدالة $g$ في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ يقبل عند النقطة $A(5;-4)$ مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $2x-3y+1=0$.

**II -** $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $f(x)=\dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3}$.

ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. (وحدة الطول $1\text{cm}$)

**1)** احسب النهايات عند حدود مجالات تعريف الدالة $f$.

**2)** اكتب معادلة لكل من المستقيمات المقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.

**3)** بيّن أنّ: من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}-\{-1;3\}$، $f'(x)=\dfrac{24x-24}{(x^2-2x-3)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ .

**4)** ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم $(\mathscr{D})$ الذي معادلته $y=1$ ، مع تحديد نقاط تقاطعهما.

**5)** اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=-3$.

**6)** أثبت أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ محور تناظر للمنحني $(\mathscr{C})$.

**7)** احسب $f(-2)$ و $f(0)$ ، ثم ارسم المستقيمات المقاربة، المماس $(\Delta)$ والمنحني $(\mathscr{C})$.

**8)** $m$ وسيط حقيقي. استعمل $(\mathscr{C})$ لتعيين عدد وإشارة حلول المعادلة $(m+3)x^2-2(m+3)x-3(m-1)=0$.

**III -** $h$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$ بـ: $h(x)=\dfrac{6x-3}{x^2-2x-3}$.

ليكن $(\mathscr{C}')$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

**1)** بيّن أنّ الدالة $h$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$.

**2)** بيّن أنّه يوجد مماسا مشتركا بين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ يطلب تعيين معادلة له.

بالتّوفيق

# تصحيح فرض الفصل الأول 2022م

"عبد المطلب"

## تمرين 1:

1) $(D): y=ax+b$ يشمل $C(6;0)$ و $D(4;3)$

بمعنى: $0=6a+b$ و $3=4a+b$

ومنه: $(D): y=-\frac{3}{2}x+9$

$(\Delta): y=ax+b$ يشمل $A(2;3)$ و $E(\frac{1}{2};4)$

بمعنى: $3=2a+b$ و $4=0{,}5a+b$

ومنه: $(\Delta): y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$

2) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=3$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{f(x)+1}}=\frac{1}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}$$

بما أن: $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x-9\right)=0$ لأن (D) مستقيم مقارب مائل، إذن $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x\right)=9$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x\right)=9-\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}x=-\infty$$

3) $\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{f(x)-1}{x}=f'_g(0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-1}{-3-0}=-1$

(معامل توجيه نصف المماس عند 0 من اليسار)

$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{f(x)-1}{x}=f'_d(0)=\frac{4-1}{0{,}5-0}=6$.

(معامل توجيه نصف المماس عند 0 من اليمين)

$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0$

(المماس يوازي حامل محور الفواصل)

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ نضع: $h(x)=f(-x+4)$

$h(2)=f(2)=3$ و $h'(x)=-f'(-x+4)$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(-x+4)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)=\frac{2}{3}$$

4) $f'_g(0)\neq f'_d(0)$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق عند 0 . B تسمى نقطة زاوية.

5) إشارة $f'(x)$:

لدينا: $f'(\alpha)=0$، لأن المماس يوازي (Ox).

ومنه:

| | 0 | | α | |
|---|---|---|---|---|
| − | ‖ | + | 0 | − |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | ‖ | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 3 | ↘ | 1 | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ |

6) لما يكون $x$ قريبا من 2:

$(\Delta): f(x)\simeq f'(2)(x-2)+f(2)\simeq-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$

$f(2{,}001)\simeq-\frac{2}{3}(2{,}001)+\frac{13}{3}\simeq 2{,}999$

7) f مستمرة ومتناقصة تماما على $[4{,}5;5]$، و $f(5)<0$ و $f(4{,}5)>0$، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$.

إشارة $f(x)$:

| | β | |
|---|---|---|
| + | 0 | − |

8) $1<m+1<3$ ومنه $0<m<2$

9) أ) حتى تكون g معرفة على $\mathbb{R}$ يجب: $c\geq0$ ، $D_g=\mathbb{R}$

ب) $a<0$: $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$a=1$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+b-\sqrt{x^2+c}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+c})(x+\sqrt{x^2+c})}{x+\sqrt{x^2+c}}+b$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\frac{-c}{x+\sqrt{x^2+c}}}_{\to 0}+b\right)=b$$

$a>1$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(ax+b-\sqrt{x^2+c}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[x\underbrace{\left(a-\sqrt{1+\frac{c}{x^2}}\right)}_{>0}+b\right]=+\infty$$

جـ) $f'(x)=a-\frac{x}{\sqrt{x^2+c}}$ و $f'_g(0)=-1$

ومنه: $a=-1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x+b-\sqrt{x^2+c}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{(-\sqrt{x^2+c}-x)(-\sqrt{x^2+c}+x)}{-\sqrt{x^2+c}+x}+b\right)$$

$=\lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{\frac{c}{-\sqrt{x^2+c}+x}}_{\to 0}+b\right)=3$ ومنه: $b=3$

$f(0)=b-\sqrt{c}=1$ : $c=4$

$g(x)=-x+3+\sqrt{x^2+4}$

## تمرين 2 :

I-1) $g'(x) = \dfrac{0-(2x-2)b}{(x^2-2x-3)^2} = \dfrac{-2b(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$

2) $2x-3y+1=0$ يعني : $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$\begin{cases} g(5) = -4 \\ g'(5) = \frac{2}{3} \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} a + \frac{b}{12} = -4 \\ \frac{-2b(4)}{12^2} = \frac{2}{3} \end{cases}$

نجد : $a=-3$ و $b=-12$

$$g(x) = -3 - \frac{12}{x^2-2x-3}$$

II-1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \frac{-3x^2}{x^2} = -3$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim \dfrac{\overbrace{-3x^2+6x-3}^{\to -12}}{\underbrace{x^2-2x-3}_{\to 0^+}} = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = +\infty$ $\quad$ + $-1$ − $3$ +

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{\overbrace{-3x^2+6x-3}^{\to -12}}{\underbrace{x^2-2x-3}_{\to 0^-}} = +\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} f(x) = -\infty$

2) من النهايات ، المستقيمات المقاربة :

$y=-3$ ، $x=3$ ، $x=-1$

3) $f'(x) = \dfrac{(-6x+6)(x^2-2x-3)-(2x-2)(-3x^2+6x-3)}{(x^2-2x-3)^2}$

$$f'(x) = \frac{24(x-1)}{(x^2-2x-3)^2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | ‖ | − | 0 | + | ‖ | + | |
| $f(x)$ | $-3$ ↘ | | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $-3$ |

4) ندرس إشارة $f(x)-y$ :

$f(x)-y = \dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3} - 1 = \dfrac{-4x^2+8x}{x^2-2x-3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-4x^2+8x$ | | − | | − | 0 | + | 0 | − | | − | |
| $x^2-2x-3$ | | + | 0 | − | | − | | − | 0 | + | |
| $f(x)-y$ | | − | ‖ | + | 0 | − | 0 | + | ‖ | − | |

(D) فوق (C) : $x \in ]-\infty;-1[ \cup ]0;2[ \cup ]3;+\infty[$

(C) أعلى (D) : $x \in ]-1;0[ \cup ]2;3[$ .

(C) يقطع (D) عند : $B(0,1)$ و $C(2,1)$ .

5) $y = f'(-3)(x+3) + f(-3) = -\frac{2}{3}x - 6$

6) $x \in D_f$ ، فإن $(2-x) \in D_f$ و $f(2-x)=f(x)$

$x \neq -1$ ، $-x \neq 1$ إذن $2-x \neq 3$

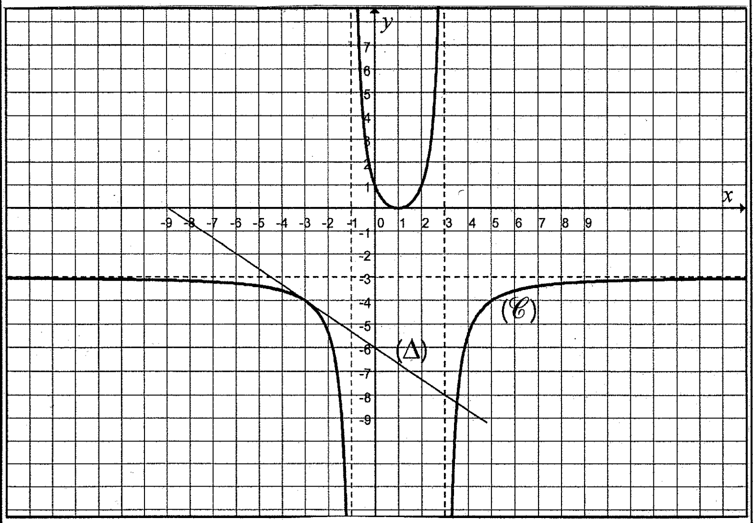
$x \neq 3$ ، $-x \neq -3$ إذن $2-x \neq -1$

ومنه إذا كان $x \in \mathbb{R}-\{-1;3\}$ فإن $2-x \in \mathbb{R}-\{-1;3\}$

$f(2-x) = \dfrac{-3(2-x)^2+6(2-x)-3}{(2-x)^2-2(2-x)-3} = \dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3}$

$f(2-x)=f(x)$ ومنه : $x=1$ محور تناظر (C)

7) $f(-2) \simeq -5,4$ و $f(0)=1$ :




8) $m(x^2-2x-3) = -3x^2+6x-3$

$m = \dfrac{-3x^2+6x-3}{x^2-2x-3} = f(x)$

حلول هذه المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C) مع المستقيمات الأفقية : $y=m$ .

$m \in ]-\infty;-3[ \cup ]1;+\infty[$ : حلان مختلفان في الإشارة

$m \in [-3;0[$ : لا يوجد حلول .

$m \in ]0;1[$ : حلان موجبان تماما .

$m=0$ : حل مضاعف موجب ($x=1$) .

$m=1$ : حل معدوم وآخر موجب ($x=2$)

III-1) $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1;3\}$ : $h'(x) = \dfrac{-6x^2+6x-24}{(x^2-2x-3)^2}$

لأن $\Delta<0$ و $a<0$ : $h'(x)<0$

ومنه : $h$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}-\{-1;3\}$

2) مماسا مشتركا يعني : $h'(x_0) = f'(x_0)$ و $h(x_0) = f(x_0)$

$\dfrac{-6x_0^2+6x_0-24}{(x_0^2-2x_0-3)^2} = \dfrac{24x_0-24}{(x_0^2-2x_0-3)^2}$

نجد : $6x_0^2+18x_0=0$ يعني : $x_0=0$ أو $x_0=-3$

$h(x_0)=f(x_0)$ نجد $x_0=0$

ومنه : $y = -\frac{8}{3}x + 1$

"عبد المطلب"