

البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

المدة: 3 ساعات ونصف

المستوى: ثالثة علوم تجريبية

على المترشح اختيار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثماني كرات منهم: 3 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرتين بيضاوين الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع كرتين من الصندوق (1) نعتبر الحدث A التالي: الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل. و الحدث B : الحصول على كرتين من نفس اللون.

$$(أ) \text{ بين أن } P(B) = \frac{1}{4}, P(A) = \frac{13}{28}$$

(ب) نضيف الى الصندوق n كرة بيضاء، نعتبر الحدث C : الحصول على كرتين بيضاوين

$$\text{بين أن: } P(C) = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}, \text{ ثم أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} p(C) \text{ و ماذا تستنتج.}$$

(2) نسحب عشوائيا و في أن واحد 3 كرات من الصندوق -وضعية الصندوق الأولى- و نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

(أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي. (ب) احسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

$$\text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة ب: } u_0 = \frac{3}{4} \text{ و } u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$$

(1) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{1}{2} < u_n < 1$.

(2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة ب: } t_n = \ln \left(\frac{1 - u_n}{u_n} \right)$$

أ- بين أن المتتالية t_n هندسية أساسها 2 ثم عبر عن t_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

ب- عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n)$.

$$(4) \text{ أحسب الجداء } P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$$

$$\text{أحسب المجموع } S_n = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n}$$

التمرين الثالث: (5 نقاله)

- (1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة $(z - i\sqrt{3})(z^2 + -2z + 4) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) . نعتبر النقط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب: $z_C = i\sqrt{3}, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_A = 1 + i\sqrt{3}$
- (أ) أكتب على الشكل الأسّي z_C, z_B, z_A ثم أحسب العدد $(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969}$
- (ب) أكتب على الشكل الأسّي العدد $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم حدد طبيعة المثلث ABC .
- (ت) استنتج طبيعة التحويل S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C مبرزا عناصره المميزة.
- (3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A, 1); (B, \alpha); (C, 1)\}$ حيث $\alpha \neq -2$ عيين قيمة α حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC .
- (4) حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|\bar{z} + i\sqrt{3}| = |iz + \sqrt{3} - i|$.

التمرين الرابع: (07 نقاله)

1. لتكن g دالة عددية معرفّة على $]-2, +\infty[$ بـ: $g(x) = -1 + (x + 2)e^x$.
- (1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-0,5 < \alpha < -0,4$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .
- II. لتكن f دالة عددية معرفّة على $]-2, +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - \ln(x + 2)$
- و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.
- (1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.
- (2) أثبت أنه من أجل كل x من $]-2, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x + 2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (3) أكتب معادلة (Δ) مماس المنحنى (C_f) عند مبدأ المعلم O
- (4) أنشئ (C_f) و (Δ) . تعطى $f(\alpha) \simeq 0,2$
- (5) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و $x = 0$ و $x = 1$.
- (6) ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ، حيث $e^x + \ln\left(\frac{m + 2}{x + 2}\right) = e^m$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقالها)

لتكن h دالة عددية مُعرّفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي. (أنظر الملحق) و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

$$(1) \quad \text{نعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المُعرّفة بـ: } u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} \quad \text{و} \quad u_0 = 5$$

أ- مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الرسم

ب- أعط تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية و تقاربها (u_n)

$$(2) \quad \text{بين أنه من أجل كل } x \text{ من }]0, +\infty[\text{ أنه } h'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} \text{ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة } f.$$

(3) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$(4) \quad \text{نعتبر المتتالية } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المُعرّفة بـ: } v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

أ- بين أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n . عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$.

$$(5) \quad \text{أحسب الجداء } P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}$$

التمرين الثاني: (04 نقالها)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. نعتبر النقط $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$.

(1) أثبت أن النقط A ، B و C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

$$(2) \quad \text{ليكن } (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى } (\Delta) \quad \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

بين أن المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(3) نسمي H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC) .

بين أن H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2); (B, -1); (C, 2)\}$

(4) نعتبر $(T_1), (T_2)$ مجموعتي النقط من الفضاء والتي تحقق :

$$(T_1) : (-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0 \quad \text{و} \quad (T_2) : \left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$$

عين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1), (T_2)$ ، ثم عين طبيعة تقاطعهما.

التمرين الثالث: (05 نقاط) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (O, \vec{u}, \vec{v}) .

نعتبر في مايلي النقط A, B, C التي لواحقها $z_A = 4 - 3i, z_B = 4 + 3i, z_C = 7$ على الترتيب عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية:

(1) المعادلة $z^3 - 15z^2 + 81z - 175 = 0$ للمتغير المركب z حيث $z_0 = 7$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي:

$$S = \{-7, 4 - 3i, 4 + 3i\} \quad (\text{أ}) \quad S = \{7, -4 - 3i, -4 + 3i\} \quad (\text{ب}) \quad S = \{-7, 4 - 3i, 4 + 3i\} \quad (\text{ج})$$

(2) العدد $\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)^{2018}$ يساوي:

$$1 \quad (\text{أ}) \quad 0 \quad (\text{ب}) \quad -1 \quad (\text{ج})$$

(3) لدينا $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$ المثلث ABC

(أ) قائم في C (ب) قائم في C و متساوي الساقين (ج) متساوي الساقين.

(4) العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه ω ذات اللاحقة $z_\omega = 4$ ويحول النقطة C إلى النقطة B فإن العبارة المركبة لهذا التحويل:

$$z' = iz + 4 - 4i \quad (\text{أ}) \quad z' = 2iz + 3 - 4i \quad (\text{ب}) \quad z' = iz + 3 - 4i \quad (\text{ج})$$

(5) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z ، من المستوي المركب حيث يكون $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلياً صرفاً جزؤه

التخيلي موجب. هي:

(أ) المستقيم (AB) (ب) دائرة قطرها $[AB]$ (ج) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $1 < \alpha < 2$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من $]0, +\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي. وحدة الطول: محور الفواصل $1 \rightarrow 1 \text{ cm}$, محور الترتيب $1 \rightarrow 5 \text{ cm}$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فسّر هندسياً النتائج.

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ أن $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(4) أنشئ (Δ) و (C_f) . تعطى $f(\alpha) = 0,4$

(5) ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ،

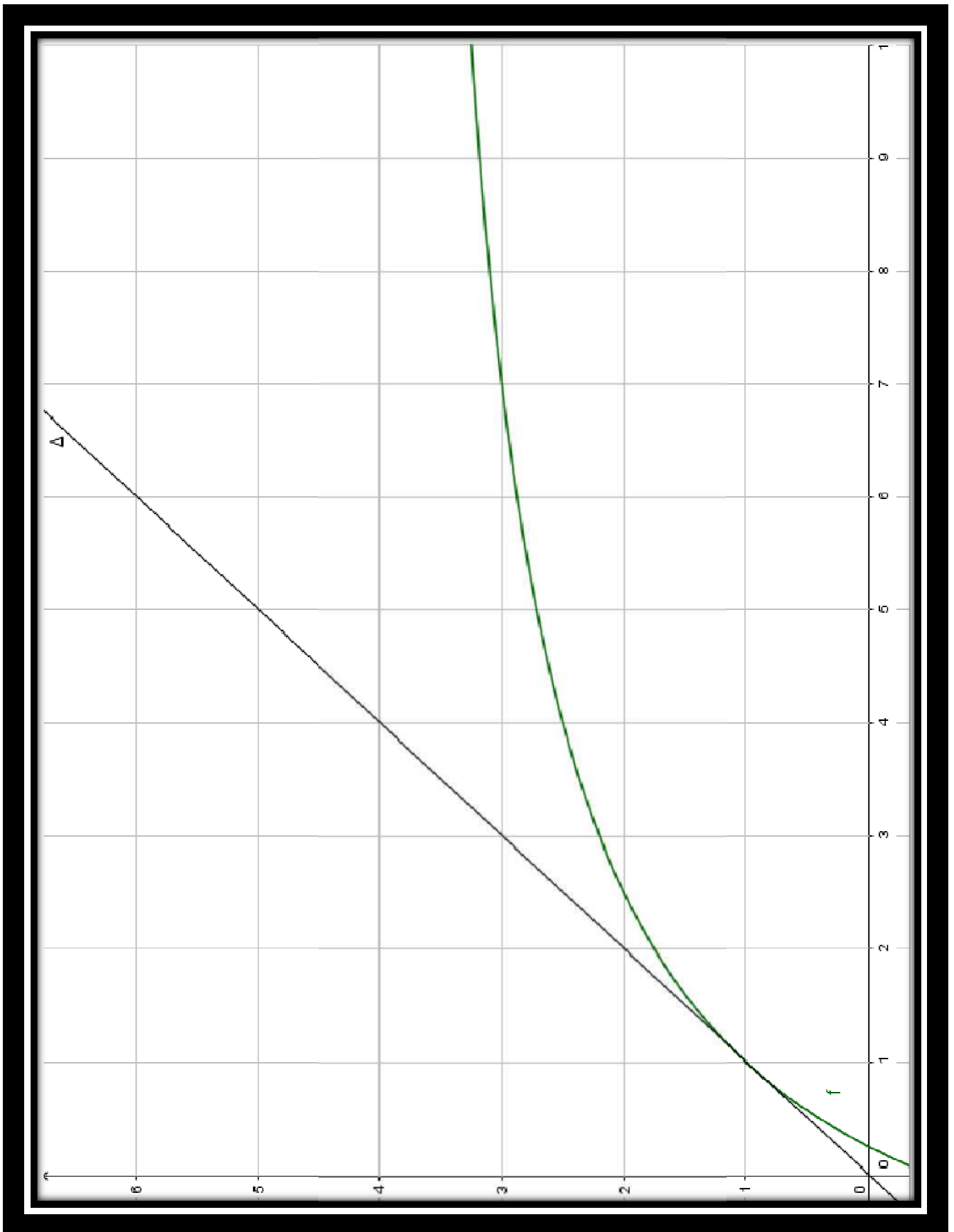
$$\text{حيث } x^2 + x + 2 \ln x = m(x^3 + x^2)$$

انتمى الموضوع الثاني

بالتوفيق والنجاح © وفي شهادة البكالوريا 2019

المستأذنة

الملحق خاص بالتمرين الأول الموضوع الثاني



التصحيح المفصل للبيكأوربا التجريبي دورة ماي 2019

الموضوع 01

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط)

(الإحتمالات)

التقيط

1 (I) أولاً نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب : $A_8^2 = \frac{(8)!}{(8-2)!} = 8 \times 7 = 56$

$$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)!}{2!(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)(n+6)!}{2(n+6)!} = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

1 (I) الحدث A احتمال سحب كرة بيضاء على الأقل :

$$P(A) = \frac{A_2^1 \times A_6^1 + A_6^1 \times A_2^1 + A_2^2}{56} = \frac{26}{56} = \frac{13}{28}$$

الحدث B احتمال سحب كرتين من نفس اللون:

$$P(B) = \frac{A_3^2 + A_3^2 + A_2^2}{56} = \frac{14}{56} = \frac{1}{4}$$

ب) الحدث C احتمال سحب كرتين بيضاوين بعد اضافة n كرة بيضاء :
 أولاً نحسب عدد الحالات الممكنة للسحب :

$$A_{8+n}^2 = \frac{(8+n)!}{(6+n)!} = \frac{(8+n)(7+n)(6+n)!}{(6+n)!} = (8+n)(7+n)$$

ثانياً نحسب عدد الحالات الملائمة للسحب :

$$A_{n+2}^2 = \frac{(n+2)!}{(n+2-2)!} = \frac{(n+2)(n+1)(n)!}{(n)!} = (n+2)(n+1)$$

$$P(C) = \frac{(n+2)(n+1)}{(n+8)(n+7)}$$

إذن احتمال سحب كرتين بيضاوين هو :

(ب) حساب $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ ، ثم نفسر النتيجة :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+8)(n+7)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$$

التفسير: الحادثة "سحب كرتين بيضاوين" تكون حادثة أكيدة لما n يكون كبيراً بالقدر الكافي.

(II) 1 قيم المتغير العشوائي X :

المتغير العشوائي يعبر عن عدد الكرات الحمراء المسحوبة

و منه قيم المتغير العشوائي X هي : $(X=0), (X=1), (X=2), (X=3)$

2) تعيين قانون الإحتمال، وحساب أملة الرياضي :

- حالة $(X = 0)$ أي الكرات المسحوبة من لون آخر ، إذن : $P(X = 0) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}$ ، أي : \therefore

- حالة $(X = 1)$ أي سحب كرة حمراء وكرتين من الباقي $P(X = 1) = \frac{C_5^2 C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56}$

. حالة $(X = 2)$ أي سحب كرتين حمراء وكرة من الباقي $P(X = 2) = \frac{C_5^1 C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56}$

حالة $(X = 3)$ أي سحب ثلاثة كرات حمراء $P(X = 3) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56}$

حساب الأمل الرياضي : $E(X) = \sum_{i=0}^3 X_i \cdot P_i$ ، أي : $E(X) = \frac{63}{56}$

حساب التباين : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ ، أي : $V(X) = \frac{99}{56} - \left(\frac{63}{56}\right)^2 = 0,36$

حساب الانحراف المعياري : $\delta(X) = \sqrt{V(X)}$ ، أي : $\delta(X) = \sqrt{0,36} = 0,6$

التقيط

(المتتاليات العددية)

تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)

لدينا : $u_0 = \frac{3}{4}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$

_____ $P(n) : \frac{1}{2} < u_n < 1$

المرحلة 1: من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = \frac{3}{4}$ أي : $\frac{1}{2} < u_0 < 1$ ومنه $P(0)$ محققة .

المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n . أي نفرض أن $\frac{1}{2} < u_n < 1$ صحيحة و نبين

أن : $\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$

- لدينا فرضاً أن : $\frac{1}{2} < u_n < 1$ ، يكفي أن نبرهن أن : $u_{n+1} < 1$ و $\frac{1}{2} < u_{n+1}$ ،

• نبين أن : $u_{n+1} < 1$

نحسب $u_{n+1} - 1$:

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + 2u_n - 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1} = \frac{-(u_n - 1)^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$$

أن : $u_{n+1} < 1$

• نبين أن : $\frac{1}{2} < u_{n+1}$. نحسب $u_{n+1} - \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} < u_{n+1} \text{ : أي أن } u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - \frac{1}{2} = \frac{2u_n^2 - 2u_n^2 + 2u_n - 1}{2(2u_n^2 - 2u_n + 1)} = \frac{2u_n - 1}{2(2u_n^2 - 2u_n + 1)}$$

وعليه : $\frac{1}{2} < u_{n+1} < 1$.

و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) دراسة رقابة المتتالية (u_n) :

من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$:

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - u_n = \frac{u_n^2 + 2u_n^2 - 2u_n^3 - u_n}{2u_n^2 - 2u_n + 1} - u_n = \frac{u_n(-2u_n^2 + 3u_n + 1)}{2u_n^2 - 2u_n + 1}$$

$$\text{لدينا } \frac{1}{2} < u_n < 1 \text{ ، لدينا } -2u_n^2 + 3u_n + 1 > 0 \text{ ، } \frac{1}{2} < u_n < 1$$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N} .

(3) إستنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحساب نهايتها :

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ 1 ، إذن هي متقاربة .

(3أ) بيان أن (t_n) متتالية هندسية :

$$\text{لدينا : } t_n = \ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) \text{ ، أي :}$$

$$t_{n+1} = \ln\left(\frac{1-u_{n+1}}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{1 - \frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}}{\frac{u_n^2}{2u_n^2 - 2u_n + 1}}\right) = \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n^2 - 2u_n + 1}\right) = \ln\left(\frac{(1-u_n)^2}{u_n^2}\right) = \ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 2t_n$$

ومنه : $t_{n+1} = 2.t_n$ ، إذن المتتالية (t_n) هندسية أساسها $q = 2$ ، وحدها الأول :

$$. t_0 = \ln\left(\frac{1-u_0}{u_0}\right) = \ln\left(\frac{1-\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln 3$$

(ب) التعبير عن t_n بدلالة n و u_n بدلالة n :

$$- \text{ عبارة } t_n : t_n = t_0 \times q^n \text{ ، أي : } t_n = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \times (2)^n .$$

$$- \text{ عبارة } u_n \text{ : لدينا } t_n = \ln\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) \text{ أي : } e^{t_n} = \frac{1-u_n}{u_n} \text{ ، أي : } u_n e^{t_n} = 1 - u_n$$

$$u_n e^{t_n} + u_n = 1 \text{ أي : } u_n(e^{t_n} + 1) = 1 \text{ أي : } u_n = \frac{1}{(e^{t_n} + 1)} \text{ أي أن } u_n = \frac{1}{(e^{t_n} + 1)}$$

$$u_n = \frac{1}{\left(e^{\ln\left(\frac{1}{3}\right)(2)^n} + 1 \right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + 1}$$

(ج) حساب نهاية المتتالية (u_n) :

نعلم أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = 0$ ، لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \times (2)^n = -\infty$ و $u_n = \frac{1}{(e^{t_n} + 1)}$ ، ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$$

(5) حساب الجداء المجموع S_n :

حساب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$ تكافئ $P_n = (t_0 \times q^0) \times (t_0 \times q^1) \times \dots \times (t_0 \times q^n)$

تكافئ $P_n = (t_0 \times t_0 \times \dots \times t_0) \times (q^0 \times q^1 \times \dots \times q^n)$ تكافئ

$$P_n = \left(\ln\left(\frac{1}{3}\right) \right)^{n+1} \times (2)^{\frac{(n)(n+1)}{2}} \quad \text{تكافئ} \quad P_n = (t_0)^{n+1} \times (q^{0+1+2+\dots+n}) = (t_0)^{n+1} \times (q)^{\frac{(n)(n+1)}{2}}$$

$$S_n = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{t_1} + \dots + \frac{1}{t_n} = \frac{1}{t_0 \times q^0} + \frac{1}{t_0 \times q^1} + \dots + \frac{1}{t_0 \times q^n} \quad \text{حساب المجموع}$$

$$\text{تكافئ} \quad S_n = \frac{1}{t_0} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{q}\right)} \right) \quad \text{تكافئ} \quad S_n = \frac{1}{t_0} \left(\frac{1}{q^0} + \frac{1}{q^1} + \dots + \frac{1}{q^n} \right)$$

$$S_n = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)} \right)$$

التقيط

(الأعداد المركبة)

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط)

(1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} ، المعادلة $(z - i\sqrt{3})(z^2 + -2z + 4) = 0$.

(ب) المستوي المركب منسوب إلى لدينا $P(z) = 0$ يكافئ $(z - i\sqrt{3})(z^2 + -2z + 4) = 0$ يكافئ

$$\begin{cases} (z - i\sqrt{3}) = 0 \dots\dots\dots (1) \\ (z^2 + -2z + 4) = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

$$(z^2 + -2z + 4) = 0 \dots\dots (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن $z = i\sqrt{3}$.

المعادلة (2) من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز Δ حيث $\Delta = -12 = 12i^2$ ، إذن

فهي تقبل حلين مترافقين هما $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 1 - i\sqrt{3}$ و

هي $P(z) = 0$ حول المعادلة $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 1 + i\sqrt{3}$ وعليه مجموعة حلول المعادلة $S = \{i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$

(أ) كتابة على الشكل الآسي z_C, z_B, z_A ثم أحسب العدد $(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969}$

$$z_C = i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}} \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \quad z_A = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

● حساب العدد $(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969}$

$$(z_A)^{2019} + (z_B)^{1440} + (z_C)^{2969} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2019} + \left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{1440} + \left(\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{2969}$$

$$\left(2^{2019}e^{i\frac{2019\pi}{3}}\right) + \left(2^{1440}e^{-i\frac{1440\pi}{3}}\right) + \left(\sqrt{3}^{2969}e^{i\frac{2969\pi}{2}}\right) = 2^{2019}e^{i673\pi} + 2^{1440}e^{-i480\pi} + \sqrt{3}^{2969}e^{i\left(1484\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$2^{2019}e^{i\pi} + 2^{1440}e^{i0} + \sqrt{3}^{2969}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -2^{2019} + 2^{1440} + \sqrt{3}^{2969}i$$

(ب) كتابة على الشكل الآسي العدد $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ ثم تحديد طبيعة المثلث ABC .

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3}} = \frac{1}{i2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}i = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = |L| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ أي أن $AC \neq BC$ ، كذلك لدينا

مع $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه $(\overline{AB}, AC) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، وعليه يكون المثلث ABC قائم في A .

(ت) استنتاج طبيعة التحويل S الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C و عناصره المميزة.

لدينا $\begin{cases} z_A = az_A + b \dots (1) \\ z_C = az_B + b \dots (2) \end{cases}$ بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على

$z_C - z_A = a(z_B - z_A)$ ومنه $a = L = \frac{\sqrt{3}}{6}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ إذن، وعليه التحويل S تشابه مباشر نسبته

$|L| = \frac{\sqrt{3}}{6}$ وزاويته $\arg(L) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومركزه A .

(ب) لدينا $z_D = iz_B + 4 - 4i$ ومنه $z_D = 7$.

(3) لتكن G مرجح الجملة $\{(A,1); (B,\alpha); (C,1)\}$ حيث $\alpha \neq -2$ عيين قيمة α حتى تنتمي

النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC .

لاحقة النقطة G هي $z_G = \frac{z_A + \alpha z_B + z_C}{\alpha + 2} = \frac{1 + \alpha + i(2 - \alpha)\sqrt{3}}{\alpha + 2}$ لتكن النقطة D

$$z_D = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1}{2} \text{ إذن } [BC] \text{ منتصف الضلع}$$

حتى تنتمي النقطة G إلى المتوسط المتعلق بالضلع $[BC]$ في المثلث ABC ، يجب أن يكون

$$\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \text{ تكافئ } \bar{K} = K \text{ كذلك } K = \frac{z_G - z_A}{z_G - z_D} \text{ حقيقيا بحثا و حتى يكون كذلك}$$

$$\alpha = -2 \text{ تكافئ } \alpha = 1 \text{ مرفوض أو}$$

(4) تحديد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $|iz + \sqrt{3} - i| = |\bar{z} + i\sqrt{3}|$ تكافئ

$$|i(z - i\sqrt{3} - 1)| = |\bar{z} - (-i\sqrt{3})| \text{ تكافئ } |i(z - i\sqrt{3} - 1)| = |\bar{z} - (-i\sqrt{3})|$$

$$|z - z_A| = |\bar{z} - z_C| \text{ تكافئ } |z - z_A| = |\bar{z} - \bar{z}_C| \text{ تكافئ } |z - (i\sqrt{3} + 1)| = |\bar{z} - (-i\sqrt{3})|$$

$|z - z_A| = |z - z_C|$ تكافئ $AM = CM$ ومنه مجموعة النقط $M(z)$ هي المستقيم المحوري للقطعة $[AC]$

التنقيط

(الدالة الأسية)

تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط)

الجزء الأول:

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

x	-2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$
$g(x)$	-1	$+\infty$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-2; +\infty[$ و دالتها المشتقة

جدول التغيرات الدالة g

هي:

$$g'(x) = (x+3)e^x$$

نلاحظ أنه من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $g'(x) \leq 0$

الخلاصة: الدالة g متزايدة على $]-2; +\infty[$.

حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)e^x - 1 = -1$$

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2; +\infty[$:

الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $]-2; +\infty[$ ولدينا،

$$\begin{cases} g(-0,5) = -0, \\ g(-0,4) = +0, \end{cases} \text{ أي } g(-0,5) \times g(-0,4) < 0 \text{ وبتالي حسب } -0,5 < \alpha < -0,4 \text{ بما أن:}$$

نظرية القيم المتوسطة فإنه $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على $]1,14; 1,15[$

إشارة $g(x)$:

x	-2	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$		$+$

الجزء الثاني: لدينا: $f(x) = e^x - \ln(x+2)$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} [e^x - \ln(x+2)] = +\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = -2$ مقارب عمودي لـ (C_f)

نهاية f عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x - \ln(x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \left[\frac{e^x}{x+2} - \frac{\ln(x+2)}{x+2} \right] = +\infty$$

(2) ا) بيان أنه من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$:

الدالة f قابلة للإستقاق على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2} = \frac{xe^x + 2e^x - 1}{x+2} = \frac{(x+2)e^x - 1}{x+2} = \frac{g(x)}{x+2}$$

ب) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ، و تشكيل جدول تغيّراتها : نلاحظ أن إشارة

x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

. $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- الدالة f متناقصة تماما على $]-2; \alpha[$

- الدالة f متزايدة تماما على $]\alpha; +\infty[$

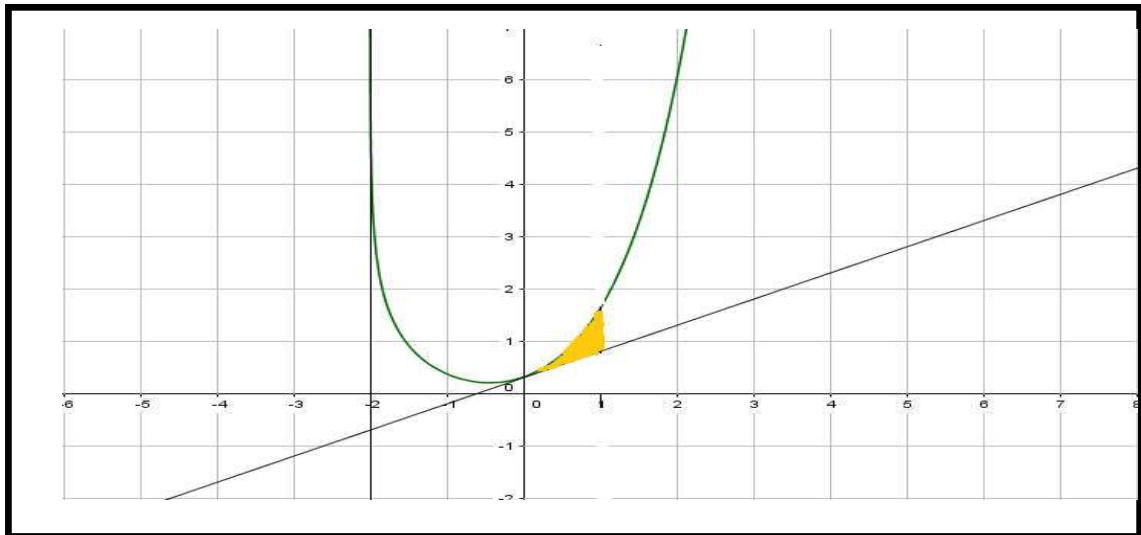
x	-2	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

- جدول التغيرات

(3) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(\Delta): y = \frac{1}{2}x + 1 - \ln 2 \quad \boxed{\text{أي}} \quad (T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

(4) رسم كلا من (Δ) و المنحني (C_f) :



الجزء الثالث :

(5) حساب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (T) و محور الترتيب و $x = 1$: —————

$$: \text{أي ، } A = \int_0^1 \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 - \ln(2) \right) \right] dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 - \ln(2) \right) dx$$

$$A = \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 \ln(x+2) dx - \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 - \ln(2) \right) dx$$



$$. A = \left[e^x - (x+2)\ln(x+2) - \frac{1}{4}x^2 + x\ln 2 \right]_0^1 \approx 0,25u.c^2$$

المناقشة بيانياً، $e^x + \ln\left(\frac{m+2}{x+2}\right) = e^m$ تكافئ $e^x + (m+2) - \ln(x+2) = e^m$ تكافئ

تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة $y = f(m)$ وهي مناقشة أفقية حلولها فواصل نقط

من أجل $m = \alpha$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا
من أجل $m \in]-2; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ المعادلة تقبل حلا ن متمايزان

إعداد الاستاذ : زايدي علاء الدين

الموضوع 02

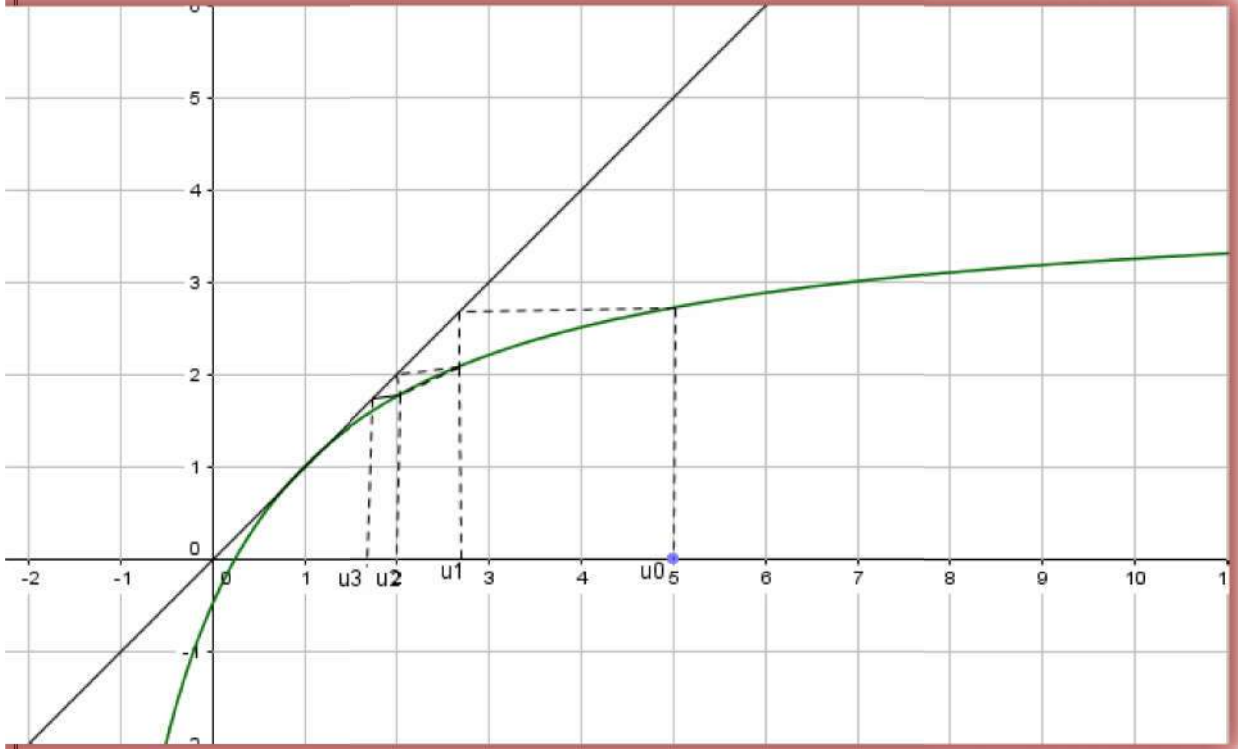
التصحيح المفصل للباكوريا التجريبي دورة ماي 2019

التنقيط

(المتاليات)

تصحيح التمرين الأول (04 نقاط)

1- أ- تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل



ب- التخمين $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ إذن من الواضح أن المتتالية u_n متناقصة تماما بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نقطة تقاطع .

2- نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ و $u_0 = 5$

من أجل كل x من $]0, +\infty[$ أنه $h'(x) = \frac{4(x+2) - 1(4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{8+1}{(x+2)^2}$ تكافئ

$h'(x) = \frac{9}{(x+2)^2} > 0$ ومنه الدالة h متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

(3) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

الشرط الأول

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0 = 5$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$u_{n+1} > 1$

حسب فرضية التراجع $u_n > 1$ نلاحظ أن $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n)$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ و تكافئ $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n)^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2}$$

نلاحظ أن $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0$ المتتالية u_n متناقصة تماما.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بـ: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ- (v_n) حسابية معناه أن $v_{n+1} - v_n = r$

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} \text{ تكافئ } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ لدينا}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2 - 3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 1} \right) = \frac{1}{3}$$

ومنه (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$

ب- عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{7}\right)n$

استنتج (u_n) بدلالة n لدينا: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ تكافئ $1 = v_n(u_n - 1)$ تكافئ

$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{7}\right)n} + 1 = \frac{28}{4n + 7} + 1$$

تعين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$.

(4) حساب الجداء $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{\frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}}$

التنقيط

(الهندسة الفضائية)

تصحیح التمرين الثاني (04 نقاط)

لدينا: $C(3; 2; 4)$ ، $B(-3; -1; 7)$ ، $A(2; 1; 3)$.

(1) أ) بيان أن النقط $C; B; A$ تعين مستويا:

1- لدينا: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ أي \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{AC} غير مرتبطين خطيا، ومنه النقط

$C; B; A$ تعين مستويا.

2) المعادلة الديكارتيّة هي

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (\Delta) \text{ المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيطى}$$

المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC) ، معناه أن $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{u}_{(\Delta)}$

$$\begin{cases} b = \frac{-3}{2}a \\ c = -a - b \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 5a + 2b - 4c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases} \text{ إذن } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\text{نفرض أن } \begin{cases} a = a \\ b = -\frac{3}{2}a \\ c = \frac{1}{2}a \end{cases} \text{ إذن } \text{وبالتالي } \vec{n}(a, \frac{-3}{2}a, \frac{1}{2}a) \text{ يوجد عدد غير منته من الأشعة تكون ناظمية}$$

للمستوى (ABC) من أجل $a = 2$ فإن $\vec{n}(2, -3, 1)$ معناه أن $\vec{n}_{(ABC)} = \vec{u}_{(\Delta)}$ أي أن المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC)

المعادلة الديكارتيّة هي $(ABC): 2x - 3y + z + d = 0$ وبما أن $A \in (ABC)$ فإن $(ABC): 2x - 3y + z - 4 = 0$

3) إحدائيات H :

لدينا H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC) . أي أن إحدائيات H تحقق الجملة

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \dots \dots \dots (1) \\ y = -3t \dots \dots \dots (2) \\ z = 4 + t \dots \dots \dots (3) \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \dots \dots \dots (4) : (ABC) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

بالتعويض نجد $t = 1$ وبتعويض قيمتها في المعادلات نجد $H(-5; -3; 5)$

H هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A, -2); (B, -1); (C, 2)\}$ لدينا $\alpha + \beta + \gamma = -2 + 2 - 1 \neq 0$ إذن H موجود ووحيد

$$\begin{cases} x_H = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} = -5 \\ y_H = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} = -3 \\ z_H = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = 5 \end{cases}$$

تعين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1), (T_2)$ ، ثم عين طبيعة تقاطعهما.

(T_1) تكافئ $(\vec{MH})(\vec{BC}) = 0$ هي المستوي الذي ناظمه $(-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC})(\vec{MB} - \vec{MC}) = 0$

$$\vec{BC} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ ويشمل النقطة } H \text{ المعادلة الديكارتيّة له هي } 6x + 3y - 3z + d = 0 \text{ وبما أن } G \in (T_1)$$

$$(T_1): 2x + y - z + 18 = 0 \quad \text{فإن}$$

تعين طبيعة (T_2)

$$(T_2): \left\| -2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \right\| = \sqrt{29}$$

تكافئ $MH = \sqrt{29}$ إذن مجموعة النقط (T_2) هي سطح كرة مركزها H و نصف قطرها $\sqrt{29}$.

$$d(H; (S)) = \frac{|ax_H + by_H + cz_H + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2(-5) + -3 + -5 + 18|}{\sqrt{6}} = 0$$

• بما أن $d(H; (S)) < R$ فإن المستوي يقطع سطح الكرة (S) في دائرة مركزها النقطة G ونصف

قطرها r

$$\text{حيث: } r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

التنقيط

(الأعداد المركبة)

تصحيح التمرين الثالث (05 نقاط)

إختيار من متعدد

(1) لدينا $P(z) = 0$ ، باستخدام خوارزمية القسمة الإقليدية نجد أن $P(z) = (z - 7)(z^2 - 8z + 25)$.

$$\begin{cases} z - 7 = 0 \dots\dots\dots(1) \\ z^2 - 8z + 25 = 0 \dots\dots(2) \end{cases} \text{ (ت) لدينا } P(z) = 0 \text{ يكافئ } (z - 7)(z^2 - 8z + 25) = 0 \text{ يكافئ}$$

من المعادلة (1) نجد أن $z = 7$.

المعادلة (2) من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز Δ حيث $\Delta = -36$ ، إذن فهي تقبل

$$\text{حلين مترافقين هما } z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 - 3i \text{ و } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 + 3i \text{، و عليه}$$

مجموعة حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي $S = \{7, 4 - 3i, 4 + 3i\}$. **الاقتراح - أ-**

$$(2) \text{ العدد } \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right)^{2018} = i^{2018} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^{2018} = e^{i\frac{2018\pi}{2}} = e^{i1009\pi} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

الاقتراح - ج-

(3) المثلث ABC قائم في C و متقايس الساقين. **الاقتراح - ب-**

$$\text{لدينا } z_A - z_C = i(z_B - z_C) \text{ و منه } \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i \text{، كذلك لدينا } \left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = |i| = 1 \text{ أي أن}$$

$$AC = BC \text{، كذلك لدينا } \arg \left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{، و منه}$$

$$\arg(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ مع } k \in \mathbb{Z} \text{، و عليه يكون المثلث } ABC \text{ قائم في } C \text{ و متقايس الساقين.}$$

(4) أ) العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z' = az + b$

$$\text{لدينا } \begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \dots(1) \\ z_B = az_C + b \dots(2) \end{cases} \text{، بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على}$$

$$z_B - z_\Omega = a(z_C - z_\Omega) \text{ و منه } a = i \text{ إذن } b = 4 - 4i \text{، و عليه العبارة المركبة للدوران } R \text{ هي}$$

$$z' = iz + 4 - 4i \quad \text{الاقتراح - أ-}$$

(5) العدد $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيليّ صرف جزؤه التخييلي موجب يعني أنّ $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أنّ

و C والزواية \widehat{MBC} موجّهة في الاتجاه الموجب. الاقتراح - ج-

و C والزواية \widehat{MBC} موجّهة في الاتجاه الموجب. الاقتراح - ج-

تصحيح التمرين الرابع (7 نقاط)

(الدالة اللوغاريتمية)

التنقيط

الجزء الأول: لدينا: $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$

1 دراسة تغيّرات الدالة
تعيين نهايات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x) \right] = +\infty$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln(x) \right] = -\infty$$

دراسة إتجاه تغير الدالة g و تشكيل جدول تغيّراتها:
— ة g قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x} = -\frac{(4x^2 + 5x + 1)}{(2x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ من إشارة: $(x-1)(3x^2 + 3x + 2)$

جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

◆

(2) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $]-2; +\infty[$:
الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على $]0; +\infty[$ و لدينا، .

$1 < \alpha < 2$ بما أنّ: $\begin{cases} g(1) = 0,66 \\ g(2) = -0,09 \end{cases}$ أي $g(1) \times g(2) < 0$ ، وبتالي حسب نظرية القيم المتوسطة

فإنه $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α على $]1; 2[$ $g(\alpha) = 0$

◆ إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+		-

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x} \text{ : الجزء الثاني: لدينا}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{x^2 + x} = -\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب عمودي لـ (C_f)

نهاية f عند $+\infty$:

$$\text{المستقيم الذي معادلته } y = 0 \text{ مقارب أفقي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x+1} \times \frac{\ln x}{x} \right] = 0$$

لـ (C_f)

$$(2) \text{ ا} \text{ بيان أنه من أجل كل }]0; +\infty[: f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$$

الدالة f قابلة للإستقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - 2x \ln x}{(x^2+x)^2} = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$$

ت) إستنتاج إتجاه تغيّر الدالة f ، و تشكيل جدول تغيّراتها :

نلاحظ أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-

- الدالة f متزايدة تماما على $]0; \alpha[$

- الدالة f متناقصة تماما على $]\alpha; +\infty[$

- جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\alpha)$ 	
		$-\infty$	0

(3) كتابة معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$(\Delta) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{أي : } (\Delta) : y = x + 1 \text{ ، لأن : } \begin{cases} f'(1) = 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$



الجزء الثالث :

المناقشة بيانياً، $x^2 + x + 2 \ln x = m(x^3 + x^2)$ تكافئ $x^2 + x + 2 \ln x = mx(x^2 + x)$ تكافئ

تكافئ $\frac{2 \ln x}{(x^2 + x)} = mx - 1$ تكافئ $\frac{x^2 + x}{(x^2 + x)} + \frac{2 \ln x}{(x^2 + x)} = mx$ وهي مناقشة

دوارنية حولها فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك ذو المعادلة $y = mx - 1$ الذي يدور حول نقطة ثابتة $(0; -1)$

من أجل $m \in]-\infty; 0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m \in]0; 1[$ المعادلة تقبل حلان متمايزان

من أجل $m = 1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

من أجل $m \in]1; +\infty[$ المعادلة لا تقبل حولا

إعداد الأستاذ : زايد علاء الدين

بالتوفيق في البكالوريا 2019 إن شاء الله