**مديرية التربية لولاية تيسمسيلت** **ثانوية: ابن خلدون – العيون**

**المستوى: 3 ت ر** **يوم 15 – 05 – 2017** **المدة: 4 ساعات ونصف**

# بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

## الموضوع الاول

### التمرين الأول(04):

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. نعتبر النقط $A(1;0;1)$، $B(2;-1;1)$ و $C(0;1;1)$

1. تحقق ان النقط $A$، $B$ و $C$ لاتعين مستويا وحيدا
2. $(P_m)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $mx-y+(2-m)z+m+4=0$، ( $m$ عدد حقيقي )

ا) بين ان $(P_m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي $m$

ب) بين ان جميع المستويات $(P_m)$ تتقاطع في نفس المستقيم $(\Delta)$ الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

3. ا) احسب احداثيات النقطة $H$ المعرفة بـ : $2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e.\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ ( $e$ اساس اللوغارتم النيبيري)

ب) احسب المسافة بين النقطة $H$ والمستقيم $(\Delta)$

4. ا) اوجد $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e.\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}.(1+e)$

ب) اوجد المستويات $(P_m)$ التي تمس المجموعة $(S)$

### التمرين الثاني(05):

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول : $(I)$ ..... $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
   - اكتب الحلول على الشكل المثلثي
2. المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ ، لتكن النقط ،و التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=\sqrt{3}+i$، $z_C=\overline{z_B}$ وليكن العدد المركب $L$ حيث : $L=\frac{(1-i)z_B}{z_C}$

ا) اكتب العدد $L$ على الشكل الاسي ثم احسب $L^{2016}$

ب) عين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون العدد $L^n$ تخيلي صرف

3. ا) بين انه يوجد دوران $r$ مركزه $B$ ويحول $A$ الى $C$ ، يطلب تعيين زاويته .

ب) استنتج طبيعة المثلث $ABC$ واحسب مساحته

4. ا) عين $(E_1)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون العدد $\frac{z-\sqrt{3}+i}{z-2i}$ حقيقي موجب

ب) عين $(E_2)$ مجموعة النقط $M$ ذات اللاحقة $z$ بحيث يكون $iz=-1+i\sqrt{3}+2ie^{i\theta}$ عندما $\theta$ يمسح $\mathbb{R}$

### التمرين الثالث(04):

1. لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-x\ln x$ . ادرس تغيرات الدالة $f$
2. $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n=\frac{e^n}{n^n}$

احسب الحدود : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ و $u_5$ ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغيرها ونهايتها

3. $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \ln(u_n)$

ا) اثبت ان : $v_n = n - n\ln(n)$

ب) باستعمال الدالة $f$ ، ادرس اتجاه تغير $(v_n)$ ثم استنتج ان $(u_n)$ متناقصة

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $0 < u_n \le e$

د) استنتج ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة وعين نهايتها .

## التمرين الرابع(07):

### الجزء 1 :

$f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x})$ ، $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و5cm على محور التراتيب

1. احسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا
2. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$: $f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$

   ب) احسب نهاية $f$ عند $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا
3. نعتبر على المجال $]-1;+\infty[$ الدالة $g$ المعرفة بـ : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

   ا) ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $[0;+\infty[$

   ب) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج اشارة $g(t)$ من اجل $t$ موجب تماما
4. ا) بين انه من اجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

   ب) استنتج ان $f$ متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها

   ج) انشئ $(C_f)$

### الجزء 2 :

نعتبر الدالة $F$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

1. تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي $t$ : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$
2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين ان : $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$
3. استنتج مساحة الحيز المحدد بـ $(C_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = \ln 4$ ، $x = 0$

مديرية التربية لولاية تيسمسيلت ثانوية: ابن خلدون – العيون

المستوى: 3 ت ر يوم 15 – 05 – 2017 المدة: 4 ساعات ونصف

# بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

## الموضوع الثاني

### التمرين الأول( 3.5 ):

نعتبر المعادلة $(E): 3x - 8y = 5$ حيث $x$ و$y$ صحيحان نسبيان

1) اثبت ان حلول المعادلة $(E)$ هي الثنائيات $(x; y)$ حيث $x = 8k - 1$، $y = 3k - 1$ و $k \epsilon \mathbb{Z}$

2) ا) لتكن $n$، $x$ و $y$ ثلاثة اعداد صحيحة تحقق $\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$ اثبت ان $(x; y)$ حل للمعادلة $(E)$

ب) نعتبر الجملة $(S) \begin{cases} n \equiv 2[3] \\ n \equiv 7[8] \end{cases}$ حيث $n$ عدد صحيح . اثبت ان $n$ حل للجملة $(S)$ اذا وفقط اذا كان $n \equiv 23[24]$

3) تأكد ان $2015$ حل للجملة $(S)$ ثم استنتج ان $2015^{1436} - 1$ يقبل القسمة على 24

### التمرين الثاني(4.5):

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس نعتبر النقط $A(-2; -1; 3)$، $B(1; 3; 5)$، $C\left(2; -\frac{1}{2}; -4\right)$ و $D(2; -2; -3)$، $E(1; -1; 2)$، $F(1; -1; 1)$ والمستقيم $(\Delta)$ معرف بالتمثيل الوسيطي التالي : $t \epsilon ]0; +\infty[$ ; $\begin{cases} x = 1 - \ln(t) \\ y = -\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z = -1 + \ln(e^2 t) \end{cases}$

1. ا) بين ان النقط $A$، $B$، $C$ تعين مستويا $(ABC)$

ب) تحقق ان الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ ثم عين معادلة ديكارتية له

2. ا) اوجد $\vec{u}$ احد اشعة توجيه المستقيم واحداثيات نقطة منه $(\Delta)$

ب) لتكن $M(x; y; z)$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$ اوجد $EM^2$ بدلالة $t$

ج) اوجد اصغر قيمة $EM^2$ ثم استنتج المسافة بين النقطة $E$ والمستقيم $(\Delta)$ و استنتج احداثيات $H$ المسقط العمودي للنقطة $E$ على المستقيم $(\Delta)$

د) اكتب معادلة سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $E$ ويمس المستقيم $(\Delta)$

3. ا) بين ان المثلث $ABC$ قائم في $A$ واحسب مساحته

ب) احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

### التمرين الثالث(05):

نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z) = z^4 + 8 - 8\sqrt{3}i$

1. ا) احسب العدد المركب $\left(\sqrt{3} + i\right)^2$ ثم استنتج في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ حلول المعادلتين : $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ و $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$

ب) تحقق انه من اجل كل عدد مركب $z$ : $P(z) = \left(z^2 + 2 + 2\sqrt{3}i\right)\left(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i\right)$

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ ذات اللاحقات $z_A = \sqrt{3} + i$، $z_B = -1 + \sqrt{3}i$، $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$ على الترتيب

ا) اكتب الاعداد المركبة $A$، $B$، $C$ و $D$ على الشكل الاسي .

ب) علم النقط $A$، $B$، $C$ و $D$ ثم بين انها تنتمي الى الدائرة مركزها $O$ يطلب تعيين نصف قطرها

ج) بين ان : $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = i$ ثم اعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}$ واستنتج طبيعة المثلث $ABD$

3. نعتبر التحويل النقطي $T$ في المستوي الذي يرفق بكل نقطة $M$ ذات اللاحقة $z$ النقطة $M'$ ذات اللاحقة $'$ حيث $z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل $T$ محددا عناصره المميزة

ب) تحقق ان $T(A) = B$، $T(B) = C$ و $T(C) = D$

ج) بين انه من اجل كل عدد مركب $z$ : $P(z') = P(z)$

د) احسب $P(z_A)$ ثم استنتج مرة اخرى حلول المعادلة $P(z) = 0$

## التمرين الرابع(07):

لتكن الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - \ln x^2 + 1) & ; x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$. وليكن $(C_f)$ تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ . وحدة الطول $2cm$

**I.** .

1. احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $0$ ثم فسر النتيجة هندسيا

3. ادرس اتجاه تغيرات الدالة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها

4. بين انه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha$ بحيث $\alpha \geq 0$ : $f(\alpha) = 0$ ، ثم تحقق ان : $4.6 < \alpha < 4.7$

5. اكتب معادلة للمستقيم $(D)$ المماس للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة $1$

**II.** $g$ دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1. احسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم ادرس اتجاه تغيرات الدالة $g'$ واستنتج اشارتها على المجال $]0;+\infty[$

2. حدد اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثم استنتج وضعية $(C_f)$ بالنسبة الى $(D)$

3. انشئ $(D)$ و $(C_f)$

**III.** .

1. من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم نضع : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

- احسب $I_n$ بدلالة $n$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

2. استنتج بدلالة $n$ المساحة $A(n)$ بـ $cm^2$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمماس $(D)$ والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$ ، ثم احسب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

التنقيط | التصحيح المفصل | التصحيح المفصل | التنقيط

## التمرين 01:

1. التحقق ان النقط $A$، $B$ و $C$ لاتعين مستويا وحيدا :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

بما ان : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$ فان الشعاعين $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AC}$ مرتبطان خطيا وبالتالي النقط $A$، $B$ و $C$ على استقامة واحدة ومنه النقط $A$، $B$ و $C$ تعين ملا نهاية من المستويات وهي حزمة المستويات المتقاطعة وفق المستقيم المار بالنقط الثلاث 0.5

2. $P(m)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق :

$mx-y+(2-m)z+m+4=0$ ، $m$ عدد حقيقي

ا) نبين ان $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي $m$ : 0.5

لدينا من اجل كل $m$ من $\mathbb{R}$ الثلاثية $(m;-1;2-m)\neq(0;0;0)$ ومنه $P(m)$ مستوي من اجل كل عدد حقيقي $m$

ب) نبين ان جميع المستويات $P(m)$ تتقاطع في نفس المستقيم $(\Delta)$ الذي يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له : 0.75

$mx-y+(2-m)z+m+4=0$ يكافئ

$(-y+2z+4)+m(x-z+1)=0$

يكافئ $(-y+2z+4)=0$ و $(x-z+1)=0$

منه $(\Delta)$ معرف بالجملة: $\begin{cases}x-z+1=0\\-y+2z+4=0\end{cases}$ اي ان $\begin{cases}x=-1+z\\y=4+2z\end{cases}$ بوضع $z=t$ ، $t$ عدد حقيقي

ومنه التمثيل الوسيطي لـ$(\Delta)$ هو: $\begin{cases}x=-1+t\\y=4+2t\\z=t\end{cases}\;;\; t\epsilon\mathbb{R}$

3. ا) حساب احداثيات النقطة $H$ حيث :

$$2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+e\overrightarrow{HC}=\vec{0}$$

بما ان : $2-1+e\neq0$ فان النقطة $H$ موجودة ووحيدة هي مرجح الجملة $\{(A;2);(B;-1);(C;e)\}$ 0.5

$\begin{cases}x_H=\frac{2x_A-x_B+ex_C}{2-1+e}=0\\y_H=\frac{2y_A-y_B+ey_C}{2-1+e}=1\\z_H=\frac{2z_A-z_B+ez_C}{2-1+e}=1\end{cases}$ ومنه $H=C(0;1;1)$

ب) المسافة بين النقطة $H$ والمستقيم $(\Delta)$: لتكن النقطة $H'$ المسقط العمودي $(\Delta)$، $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيهه ، $\overrightarrow{HH'}\begin{pmatrix}x_{H'}\\y_{H'}-1\\z_{H'}-1\end{pmatrix}$ 0.5

معناه $\begin{cases}\overrightarrow{HH'}.\vec{u}=0\\H'\epsilon(\Delta)\end{cases}$

: $\begin{cases}x_{H'}+2y_{H'}+z_{H'}-3=0\\x_{H'}=-1+t\\y_{H'}=4+2t\;\;;(t\epsilon\mathbb{R})\\z_{H'}=t\end{cases}$ معناه : $t=-\frac{2}{3}$

ومنه $H'\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3};-\frac{2}{3}\right)$

$d(H;(\Delta))=HH'=\frac{5}{\sqrt{3}}$

4. ا) ايجاد $(S)$ مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق : $\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+e\overrightarrow{MC}\|=\sqrt{5}(1+e)$

معناه $\|(2-1+e)\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}(1+e)$ معناه : 0.5

$\|\overrightarrow{MH}\|=\sqrt{5}$ ومنه $(S)$ سطح كرة مركزها النقطة $H$ ونصف قطرها $\sqrt{5}$

ب) ايجاد المستويات $(P_m)$ التي تمس المجموعة $(S)$

المستويات $(P_m)$ تمس المجموعة $(S)$ معناه : 0.75

$d(H;(P_m))=\sqrt{5}$

$$d(H;(P_m))=\frac{|mx_H-y_H+(2-m)z_H+m+4|}{\sqrt{m^2+1+(2-m)^2}}$$

$$=\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}$$

$\frac{5}{\sqrt{2m^2-4m+5}}=\sqrt{5}$ معناه : $\sqrt{5}\sqrt{2m^2-4m+5}=5$

معناه : $m^2-2m=0$ معناه $m=0$ او $m=2$ ومنه :

$(P_0):-y+2z+4=0$ او $(P_2):2x-y+6=0$

## التمرين 02:

1) نحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z$: $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$

$\Delta=-4$ ومنه $z_1=\sqrt{3}-i$ او $z_2=\sqrt{3}+i$ ومنه 0.5

$S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i\}$

كتابة الحلول على الشكل المثلثي :

$z_1=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ ، 0.5

$z_2=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2) كتابة العدد $L$ على الشكل الاسي ثم حساب $L^{2016}$

لدينا : $z_B=2e^{i\frac{\pi}{6}}$، $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$، 0.5

$1-i=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ ومنه : $L=\frac{\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}$ 0.5

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}e^{i2016\frac{\pi}{12}}=\sqrt{2}^{2016}e^{i168\pi}$

$L^{2016}=\sqrt{2}^{2016}$

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي $n$ حتى يكون $L^n$ تخيلي صرف :

لدينا : $\mathrm{L}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ ، $\mathrm{L}^n=\sqrt{2}^ne^{i\left(n\frac{\pi}{12}\right)}$ 0.5

$\mathrm{L}^n$ عدد تخيلي صرف معناه $n\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ومنه

$n=12k+6$ ، $k\epsilon\mathbb{N}$

1) ا) نبين انه يوجد دوران $r$ مركزه النقطة $B$ ويحول $A$ الى $C$ يطلب تعيين زاويته : 0.5

ليكن $r$ تحويل عبارته المركبة من الشكل $z' = az + b$ حيث $b$، $a$ عددان مركبان

لدينا معناه $\begin{cases} r(A) = C \\ r(B) = B \end{cases}$ ومنه : $a = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ و

$b = z_B(1 - a) = 2\sqrt{3}$

ومنه : $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 2\sqrt{3}$ بما ان : 0.5

$|a| = \left|-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = 1$

فان $r$ هو دوران مركزه $B$ وزاويته $arg(a) = \frac{2\pi}{3}$

ب) استنتاج طبيعة المثلث $ABC$ وحساب مساحته 0.5

لدينا : $AB = BC$ و $arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) = \frac{2\pi}{3}$ اذن

المثلث $ABC$ متقايس الاضلاع

لتكن $z_{B'}$ لاحقة منتصف $[AC]$، $z_{B'} = \frac{z_B + z_B}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ 0.5

$[BB']$ ارتفاع وعمود ومتوسط ومحور متعلق بـ : $[AC]$ في

المثلث $ABC$ المتقايس الضلعين مساحته $S = \frac{BB' \times AC}{2}$

$BB' = |z_{B'} - z_B| = 1$ ، $AC = |z_C - z_A| = 2\sqrt{3}$

ومنه : $S = \sqrt{3}ua$

1) ا) تعيين $(E_1)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i}$ حقيقي موجب : لدينا $\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i} = \frac{z - z_C}{z - z_A}$

$\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - 2i}$ حقيقي موجب معناه $arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = 2k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}$ 0.75

ومنه $arg\left(\frac{z - z_C}{z - z_A}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MC}) = 2k\pi; k\epsilon\mathbb{Z}$ ومنه $(E_1)$ هي المستقيم $(AC)$ باستثناء القطعة $[AC]$

ب) تعيين $(E_2)$ مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ عندما $\theta$ يمسح $\mathbb{R}$ 0.75

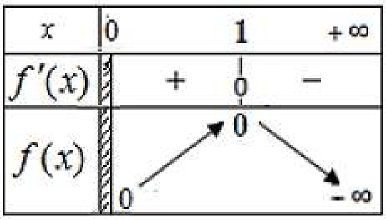
لدينا : $iz = -1 + i\sqrt{3} + 2ie^{i\theta}$ اي $iz = i(i + \sqrt{3} + 2e^{i\theta})$ اي ان : $z = \sqrt{3} + i + 2e^{i\theta}$

$z = z_B + 2e^{i\theta}$ ، $\theta$ يمسح $\mathbb{R}$ ومنه : $(E_2)$ هي دائرة مركزها النقطة $B$ ونصف قطرها 2

## التمرين 03 :

1) دراسة تغيرات الدالة $f$

$f'(x) = -\ln x$ 0.5



0.5

احسب الحدود : $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$ ، $u_4$ و $u_5$ ثم ضع تخمينا حول اتجاه 0.5

(1 $u_1 = e \approx 2.71$، $u_2 = \frac{e^2}{4} \approx 1.85$

$u_3 = \frac{e^3}{27} \approx 0.74$، $u_4 = \frac{e^4}{256} \approx 0.21$، 0.25

$u_5 = \frac{e^5}{3125} \approx 0.05$، متناقصة ونهايتها 0 0.25

ا) اثبات ان : $v_n = n - n\ln(n)$

1) ا) $v_n = \ln n = n - n\ln n$ 0.5

ب) ادرس اتجاه تغير $(v_n)$ ثم استنتج ان $(u_n)$ متناقصة:

$v_n = f(n)$ والدالة $f$ متناقصة على المجال $[1; +\infty[$

وبالتالي $(v_n)$ متناقصة وبما ان $u_n = e^{v_n}$ والدالة الاسية 0.5

متزايدة فان اتجاه تغير $(u_n)$ هو اتجاه تغير $(v_n)$ اي $(u_n)$ 0.25

متناقصة

ج) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم : $0 < u_n \le e$

بما ان $(u_n)$ متناقصة فان $u_n \le u_0 = e$ ولدينا

$e^n > 0$ و $n^n > 0$ وبالتالي $u_n > 0$ اي $0 < u_n \le e$ 0.5

د) استنتج ان المتتالية $(u_n)$ متقاربة وعين نهايتها .

$(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الاسفل فهي متقاربة . 0.25

ولدينا $\lim_{n \to +\infty} f(n) = -\infty$ اي

$\lim_{n \to +\infty} \ln u_n = -\infty$ وبالتالي $\lim_{n \to +\infty}(u_n) = 0$ 0.5

## التمرين 04 :

الجزء 1 : $f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^x)$ ، $D_f = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}\right]$ بوضع

$t = e^x$ نجد : $\lim_{t \to 0}\left[\frac{\ln(1 + t)}{t}\right] = 1$ ومنه

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$ 0.25

التفسير الهندسي: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 1$

بجوار $-\infty$ 0.25

3) ا) لدينا من اجل كل عدد حقيقي $x$ :

$f(x) = e^{-x}[\ln e^x + \ln(e^{-x} + 1)]$ ومنه

$f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})$ 0.5

ب) حساب نهاية $f$ عند $+\infty$ وتفسيرها هندسيا :

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ لان

$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{x}{e^x} + e^{-x}\ln(1 + e^{-x})\right] = 0$ 0.25

التفسير الهندسي: $(C_f)$ يقبل مستقيم مقارب افقي معادلته $y = 0$

بجوار $+\infty$ 0.25

4) $g(x) = \frac{t}{1 + t} - \ln(1 + t)$ ، $D_g = ]-1; +\infty[$

ا) دراسة تغيرات الدالة $g$:

النهايات : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

من اجل كل عدد حقيقي $t$ من $[0; +\infty[$ ولدينا :

$g'(x) = \frac{1}{(1 + t)^2} - \frac{1}{1 + t} = \frac{-t}{(1 + t)^2}$ 0.25

تغيرها ونهايتها 0.5

نلاحظ انه من اجل كل عدد حقيقي $t$ من $]0;+\infty[$ : $g'(x) < 0$

جدول التغيرات : 0.5

| t | 0 +∞ |
|---|---|
| g'(t) | − |
| g(t) | 0 ↘ −∞ |

من جدول التغيرات نستنتج انه من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما $t$ ان : $g(t) < 0$ 0.75

1) ا) حساب $f'(x)$ :

لدينا الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^{x}) + \frac{e^{x}}{1+e^{x}} \times e^{-x}$$ 0.5

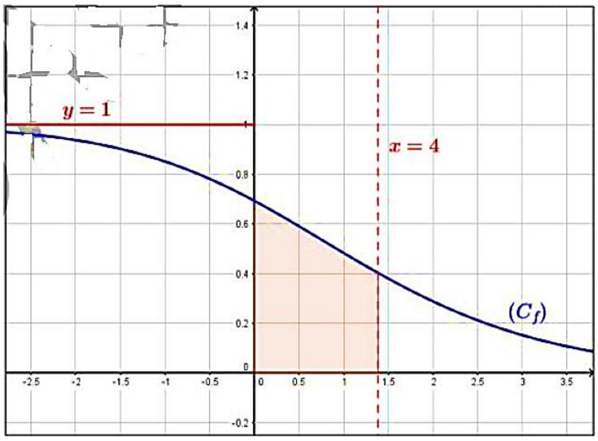
ومنه بعد التبسيط نجد : $f'(x) = \frac{g(e^{x})}{e^{x}}$

ب) من اجل كل عدد حقيقي $x$ نضع $t = e^{x}$ نجد $\frac{g(t)}{t} < 0$ ومنه نجد $\frac{g(e^{x})}{e^{x}} < 0$ اي $f'(x) < 0$ ومنه $f$ متناقصة على مجموعة تعريفها

جدول التغيرات : 0.5

| x | −∞ +∞ |
|---|---|
| f'(x) | − |
| f(x) | 1 ↘ 0 |

ج) انشاء $(C_f)$ : (انظر في اخر الصفحة )



0.5

الجزء 2: $\int_0^x f(t)dt$ 0.5

1) لدينا من اجل كل عدد حقيقي $t$ : $\frac{1}{1+e^{t}} = 1 - \frac{e^{t}}{1+e^{t}}$

2) حساب التكامل بالتجزئة :

نضع : $\begin{cases} u(t) = \ln(1+e^{t}) \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases}$ و $\begin{cases} u'(t) = \frac{e^{t}}{1+e^{t}} \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$ ومنه : 0.75

$$F(x) = [\ln(1+e^{t}) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x -e^{-t} \times \frac{e^{t}}{1+e^{t}}dt$$

$$F(x) = [\ln(1+e^{t}) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \frac{1}{1+e^{t}}dt$$

$$F(x) = [\ln(1+e^{t}) \times (-e^{-t})]_0^x - \int_0^x \left(1 - \frac{e^{t}}{1+e^{t}}\right)dt$$

$$= -f(x) - \ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right) + 2\ln 2$$

3) حساب المساحة : 0.75

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = \left[-f(x) - \ln\left(\frac{1+e^{x}}{e^{x}}\right) + 2\ln 2\right]_0^{\ln 4}$$

بعد الحساب نجد :

$$\int_0^{\ln 4} f(x)dx = \frac{-25\ln 5}{2} + 10\ln 2\ cm^2$$

عبـد اللـه علي

# التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي الموضوع الثاني ثالثة تقني رياضي

التنقيط | التصحيح المفصل

## التمرين 01 :

1. اثبت ان حلول المعادلة $(E)$ هي الثنائيات $(x;y)$ حيث $x=8k-1$ ، $y=3k-1$ و $k\epsilon\mathbb{Z}$

ومنه : $3(x+1)=8(y+1)$

3 يقسم الجداء $8(y+1)$ واولي مع فهو يقسم $y+1$ **0.5**

يعني $y=3k-1$ حيث $k\epsilon\mathbb{Z}$ وبتعويض في نجد $x=8k-1$

$\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$ يستلزم $3x+2=8y+7$ يعني **0.5**

$3x-8y=5$ ومنه $(x;)$ حل للمعادلة $(E)$

2. ا) اثبات ان $(x;y)$ حل للمعادلة $(E)$ :

$\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} n=3x+2 \\ n=8y+7 \end{cases}$ **0.75**

ب) اثبت ان $n$ حل للجملة $(S)$ اذا وفقط اذا كان $n\equiv 23[24]$

$(x;y)$ حل للمعادلة $(E)$ حسب السؤال 2 ا) ومنه

$x=8k-1$ و $y=3k-1$ اذن

$n=3x+2=24k-1$ يعني : $n\equiv -1[24]$ ومنه **0.75**

$n\equiv 23[24]$

نفرض ان يعني ومنه $\begin{cases} n-2=24k+21 \\ n-7=24k+16 \end{cases}$ ومنه **0.75**

$\begin{cases} n-2=3(7k+8) \\ n-7=8(8k+7) \end{cases}$ يعني $\begin{cases} n\equiv 2[3] \\ n\equiv 7[8] \end{cases}$

3. ا) تأكد ان $2015$ حل للجملة $(S)$:

لدينا $2015=3\times 671+2$ يعني $2015\equiv 2[3]$ و **0.5**

يعني $2015=8\times 251+7$ يعني ان $2015\equiv 7[8]$

اذن $2015\equiv 23[24]$ اذن $2015^{1436}\equiv(-1)^{1436}[24]$

$2015^{1436}\equiv 1[24]$ اخيرا $2015^{1436}-1\equiv 0[24]$ **0.5**

يعني ان $2015^{1436}-1$ يقبل القسمة على 24

## التمرين 02 :

1. ا) اثبات ان النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تعين مستويا $(ABC)$ لدينا **0.5**

: $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ -7 \end{pmatrix}$ ، $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ بما ان $8\neq\frac{3}{4}$ فان النقط $A$ ، $B$ ، $C$ تعين مستويا

ب) التحقق ان الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي $(ABC)$ نحسب

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=6-8+2=0$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=8-7-1=0$

اذن محققة **0.5**

التصحيح المفصل | التنقيط

تعيين معادلة ديكارتية للمستوي $(ABC)$ هي : **0.5**

$2x-2y+z=1$

1) ا) ايجاد $\vec{u}$ احد اشعة توجيه المستقيم $(\Delta)$ تمثيله الوسيطي

هو $\begin{cases} x=1-\ln(t) \\ x=-\ln\left(\frac{e}{t}\right) \\ z=-1+\ln(e^2t) \end{cases}$ ; $t\epsilon]0;+\infty[$ يكافئ **0.75**

$\begin{cases} x=1-\ln(t) \\ y=-1+\ln(t) \\ z=1+\ln(t) \end{cases}$ ; $t\epsilon]0;+\infty[$ بوضع

نجد $k\epsilon\mathbb{R}$ ; $\begin{cases} x=1-k \\ y=-1+k \\ z=1+k \end{cases}$ ومنه $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

نقطة من $(\Delta)$ هي $L(1;-1;1)$

ب) لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من المستقيم $(\Delta)$ ايجاد $EM^2$ بدلالة $t$

$EM^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$ ومنه **0.5**

$EM^2=(\ln(t))^2+(\ln(t))^2+(\ln(t)-1)^2$ اي

$EM^2=3(\ln(t))^2-2\ln(t)+1$

ج) ايجاد اصغر قيمة $EM^2$ نضع $EM^2=f(t)$ وندرس اتجاه

تغير الدالة $f$ نجد ان $f'(t)=\frac{2(3\ln(t)-1)}{t}$ تنعدم $f'$ عند **0.25**

$t=e^{\frac{1}{3}}$ وسالبة على المجال $\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ ومنه $f$ متناقصة على المجال

$\left]0;e^{\frac{1}{3}}\right[$ ومتزايدة على المجال $\left]e^{\frac{1}{3}};+\infty\right[$ اذن اصغر قيمة تصلها

$EM^2$ عندما $t=e^{\frac{1}{3}}$ اي $EM^2=\frac{2}{3}$ ومنه المسافة بين النقطة $E$

والمستقيم $(\Delta)$ هي $\frac{2}{3}$

د) استنتاج احداثيات $H$ المسقط العمودي للنقطة $E$ على المستقيم

$(\Delta)$ نعوض في التمثيل الوسيطي $t=e^{\frac{1}{3}}$ هي $H\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$ **0.25**

و) كتابة معادلة سطح الكرة $(S)$ التي مركزها $E$ ويمس

المستقيم $(\Delta)$ هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ حيث **0.5**

$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+\frac{16}{3}=0$ يكافئ

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{2}{3}$

2) ا) تبيين ان المثلث $ABC$ قائم في $A$ لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ ومنه **0.25**

محققة

حساب مساحة المثلث $ABC$ : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{87}{4}$ **0.5**

ب) حساب حجم رباعي الوجوه $ABCD$ نحسب

$d(D;(ABC))=\frac{4}{3}$ ومنه الحجم **0.5**

$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}.d=\frac{87}{9}$

## التمرين 03:

1. ا) احسب العدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$

$(\sqrt{3}+i)^2 = 2+2\sqrt{3}i$ 0.25

استنتاج : $z^2 = 2+2\sqrt{3}i$ معناه : $z^2 = (\sqrt{3}+i)^2$ معناه :

$z = \sqrt{3}+i$ او $z = -\sqrt{3}-i$ 0.5

$z^2 = -2-2\sqrt{3}i$ معناه : $z^2 = \left(i(\sqrt{3}+i)\right)^2$

معناه $z = -1+\sqrt{3}i$ او $z = 1-\sqrt{3}i$

$S = \{-\sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i; 1-\sqrt{3}i; -1+\sqrt{3}i\}$

ب) التحقق : $P(z) = (z^2+2+2\sqrt{3}i)(z^2-2-2\sqrt{3}i)$

$= z^4+8-8\sqrt{3}i$ 0.25

2. ا) اكتب الاعداد المركبة $A$، $B$، $C$ و $D$ على الشكل الاسي

$z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ ، $z_C = 2e^{i\left(\frac{7\pi}{6}\right)}$

$z_D = 2e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ ، 0.5

ب) تعليم النقط : 0.5

$OA = OB = OC = OD = 2$ ونصف قطر الدائرة هو 2 0.5

ج) $\frac{z_A+z_B}{z_A+z_D} = i$ و $\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A} = \frac{z_A-z_D}{z_A-z_B} = \frac{z_A+z_B}{z_A+z_D}$ ، 0.25

التفسير : $AD = AB$ و $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}$

فالمثلث $ABD$ قائم في $A$ ومتساوي الساقين 0.75

3. $T: z' = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ا) عين طبيعة التحويل $T$ محددا عناصره المميزة 0.5

$T$ دوران مركزه $O$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

ب) التحقق: $T(A) = B$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_B$

$T(B) = C$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{2\pi}{3}} = z_C$

$T(C) = D$ معناه $e^{i\frac{\pi}{2}} \times 2e^{i\frac{7\pi}{6}} = z_D$ 0.5

ج) $P(z') = P\left(e^{i\frac{\pi}{2}}z\right) = (iz)^4+8-8\sqrt{3}i = P(z)$

د) $P(z_A) = 0$ 0.25

لدينا : $P(z_A) = P(z_B)$ ومنه $P(z_B) = 0$ 0.25

$P(z_B) = P(z_C)$ ومنه $P(z_C) = 0$

$P(z_C) = P(z_D)$ ومنه $P(z_D) = 0$ 0.25

اذا حلول المعادلة $P(z) = 0$ هي :

$S = \{-\sqrt{3}-i; \sqrt{3}+i; 1-\sqrt{3}i; -1+\sqrt{3}i\}$

## التمرين 04:

1. لدينا $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2+1 \;; x>0)$ و

$f(0) = 1$ 0.25

2. حساب نهاية $f$ عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ 0.25

3. دراسة قابلية اشتقاق $f$ عند $0$

من الواضح ان $f$ غير قابلة للاشتقاق عند لانها ليست نعرفة على يسار 0.5

0

لندرس قابلية اشتقاق $f$ على يمين $0$ :

$$\lim_{\substack{> \\ x\to0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{> \\ x\to0}} \frac{\frac{1}{2}x^2(3-\ln x^2)+1-1}{x} = 0$$

ومنه قابلة للاشتقاق على يمين 0 والمنحنى $(C_f)$ يقبل نصف مماس موازي لمحور الفواصل عند النقطة $(0; 1)$

1) دراسة اتجاه تغير الدالة $f$

0.5 حساب المشتق : الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

حيث: $f'(x) = x(3-2\ln x) - x$ ومنه

$f'(x) = 2x(1-\ln x)$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة $(1-\ln x)$ لان $2x > 0$

$f'(x) \geq 0$ يكافئ $(1-\ln x) \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 1$

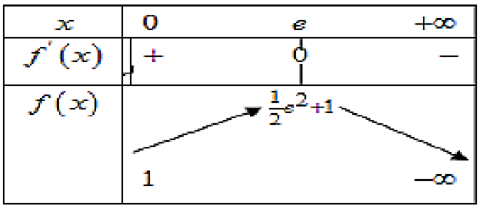
اي $x \leq e$ اي $x\epsilon]0; e]$ اذن :

$x\epsilon]0; e]$ يكافئ $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة $f$ متزايدة تماما

ونستنتج $x\epsilon[e; +\infty[$ يكافئ $f'(x) \leq 0$ ومنه الدالة $f$ متناقصة تماما

جدول تغيرات الدالة $f$ :

0.5



| $x$ | $0$ |  | $e$ |  | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ |  | $+$ | $0$ | $-$ |  |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $\frac{1}{2}e^2+1$ | ↘ | $-\infty$ |

1) تبيان انه يوجد عدد حقيقي $\alpha$ وحيد حيث: $\alpha \geq 0$

0.5 و $f(\alpha) = 0$ من جدول التغيرات نجد الدالة $f$ متناقصة تماما على $[e; +\infty[$ ومستمرة على هذا المجال ولدينا :

و $f(e) = \frac{1}{2}e^2+1$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ اذن

حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا $\alpha$ وحيدا في المجال $[e; +\infty[$ يحقق $f(\alpha) = 0$

التحقق ان: $4.6 \leq \alpha \leq 4.7$ ولدينا $f(4.7) \times$

$f(4.6) < 0$ ومنه $4.6 \leq \alpha \leq 4.7$

2) كتابة معادلة المماس $(D)$ للمنحنى $(C_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $1$ :

$(D): y = f'(x)(x-1) + f(1)$ ومنه:

0.5 $(D): y = 2x + \frac{1}{2}$

I. لدينا $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

حساب $g'(x)$ و $g''(x)$ :

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث

: $g'(x) = f'(x) - 2$ اي $g'(x) = 2x(1-\ln x)$

0.5 الدالة $g'$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث :

اي $g''(x) = 2(1-\ln x) + 2x\left(-\frac{1}{x}\right)$

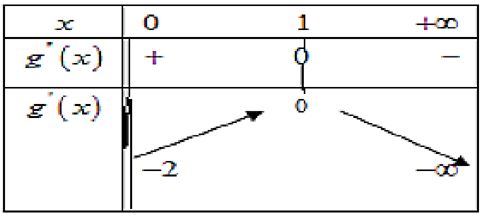
$g''(x) = -2\ln x$

دراسة اتجاه تغير $g'$

$g''(x) \geq 0$ يكافئ $-2\ln x \geq 0$ يكافئ $\ln x \leq 0$ يكافئ $0 < x \leq 1$ اذن الدالة $g'$ متزايدة تماما على $]0; 1]$ 0.5

$g''(x) < 0$ يكافئ $-2\ln x < 0$ يكافئ $\ln x > 0$ يكافئ $x < 1$ اذن الدالة $g'$ متناقصة تماما على $[1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة $g'$ : 0.25



| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(x)$ | $-2$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

اشارة الدالة $g'$ على المجال $]0; +\infty[$: 0.25

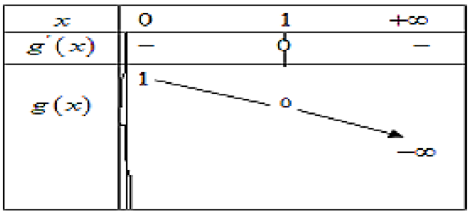
من جدول التغيرات الدالة $g'$ نجد من اجل كل عدد حقيقي $x$:

$g'(x) \leq 0$ 0.25

4. تحديد اتجاه تغير الدالة $g$ :

لدينا من السؤال 1 . $g'(x) \leq 0$ ومنه الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة $g$ :

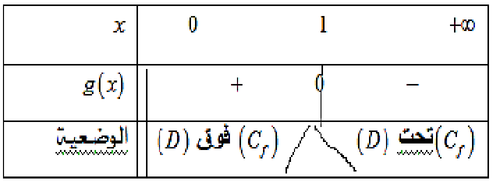


| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

0.5

من جدول تغيرات الدالة $g$ نجد: $g(x) \geq 0$ من اجل $x\epsilon]0; 1]$ ، $g(x) \leq 0$ من اجل $x\epsilon[1; +\infty[$

استنتاج وضعية $(C_f)$ بالنسبة الى يعود الى $(D)$ دراسة اشارة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2}$ اي اشارة $g(x)$



| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| الوضعية | | $(C_f)$ فوق $(D)$ | | $(C_f)$ تحت $(D)$ | |

0.5

5. انشاء $(C_f)$ و $(D)$ :

6. 1) حساب بدلالة باستعمال المكاملة بالتجزئة :

لدينا : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} x^2 \ln x \, dx$

نضع : $\begin{cases} u'(x) = x^2 \\ v(x) = \ln x \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} u(x) = \frac{x^3}{3} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$ 0.75

اذن : $I_n = \left[\frac{x^3}{3} lnx\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx$

ومنه بعد التبسيط نجد : $I_n = \frac{1}{3n^3}\left(\frac{1}{3} + \ln n\right) - \frac{1}{9}$

2) استنتاج بدلالة $n$ المساحة $A(n)$:

بما ان $0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 1$ اي $0 < x < 1$ فان

$f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$

حسب السؤال 2 من الجزء $II$ اي من اجل $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$ فان

وبالتالي : $f(x) - 2x - \frac{1}{2} > 0$

ولدينا : $A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right)\right) dx$ 0.75

$f(x) - \left(2x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} - x^2 \ln x$

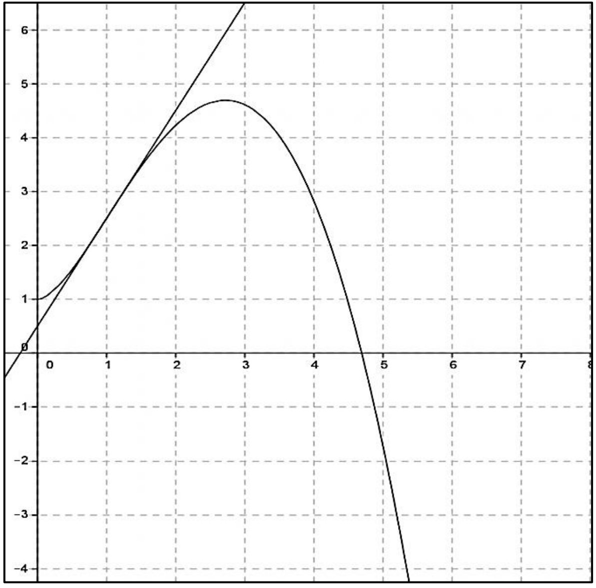
ومنه : $A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} - I_n$ بعد التبسيط نجد :

$A(n) = \left(-\frac{11}{18n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3}\left(\frac{ln(n)}{n^3}\right) + \frac{1}{9}\right) \times 4cm^2$

حساب $\lim_{n\to+\infty} A(n)$

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{ln(n)}{n^3} = 0$ ومنه نجد :

$\lim_{n\to+\infty} A(n) = \frac{4}{9}$



0.75