السنة الثالثة تقني رياضي هندسة كهربائية المدة : 4 ساعات و نصف	اختبار بكالوريا تجريبي في الرياضيات	ثانوية مليكة قايد – سطيف- 2022 -2021

على التلميذ الإجابة على أحد الموضوعين على الخيار

الموضوع الأول:

التمرين الأول(4 ن):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{8}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n(2-u_n)$

1) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(2-x)$

أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f

ب) بين أنه إذا كان $x \in]0;1[$ فإن $f(x) \in]0;1[$

2) أ) أحسب كلا من u_1 و u_2

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

جـ) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 1 - u_n$

أ) عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

ب) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n \to +\infty} u_n$

د) عين أصغر عدد طبيعي n يحقق : $u_n > 1 - 10^{-20}$

و) احسب بدلالة n الجداء $p(n)$ حيث : $p(n) = v_0 \times v_1 \times ..... \times v_n$ ، ثم عين $\lim_{n \to +\infty} p(n)$

التمرين الثاني(4 ن):

1) عين حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 5^n على 7

2) استنتج باقي قسمة العدد $2020^{1441} + 1962^{1954} + 1954^{1962}$ على 7

3) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $2020^{3n+1} + 1962^{3n+1} + 1954^{3n+1} \equiv 0[7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^n$

أ) بين أن من أجل كل عدد طبيعي n، $4S_n = 5^{n+1} - 1$

ب) نعتبر العدد الطبيعي a ، بين أن $4S_n \equiv a[7]$ إذا و فقط إذا كان $S_n \equiv 2a[7]$

جـ) استنتج باقي قسمة S_{2020} على 7

التمرين الثالث(4ن):

يحتوي كيس على ست كرات بيضاء تحمل الأرقام : 0 ؛ 0 ؛ 0 ؛ 1 ؛ 1 ؛ 2
و كرتين سوداوين تحملان الرقمين : 0 ؛ 1 . (الكرات لا نميز بينها باللمس)

1) نسحب من الكيس عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع
احسب احتمال كلا من الحدثين التاليين
A : الحصول على كرتين من نفس اللون
B : جداء العددين المسجلين على الكرتين المسحوبتين معدوم

2) نسحب الآن كرتين في آن واحد
أ) احسب احتمال الحادثة C : مجموع العددين الذين تحملها الكرتان المسحوبتان عدد أولي
ب) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب ، مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين المسحوبتين
*) عين قانون احتمال X ، واحسب أمله الرياضياتي
*) احسب $E\left(X^2\right)$

التمرين الرابع(8 ن):

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $g(x)=2x^2+1-\ln|x|$

1) ادرس تغيرات الدالة g
2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x)=2x-2+\dfrac{\ln|x|}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$. الوحدة $2\,cm$

1) أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف
2) بين أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
3) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=2x-2$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$
- أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)
4) أحسب $f(-x)+f(x)$. ماذا تستنتج بالنسبة للنقطة $\Omega(0,-2)$ ؟
5) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يمر من النقطة Ω و يمس (C_f) في نقطتين A و B يطلب تعيينهما
- أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T)
6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين أحدهما 1 و الآخر α حيث $-0{,}37<\alpha<-0{,}36$
7) أنشئ كلا من (Δ) ؛ (T) و (C_f)
8) (Δ_m) المستقيمات التي معادلاتها : $y=mx-2$ حيث m وسيط حقيقي
أ- بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تمر من نقطة ثابتة يطلب تعيينها
ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x)=mx-2$
9) λ عدد حقيقي حيث $\lambda>1$
أ- احسب بدلالة λ و بـ cm^2 المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ)
و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=\lambda$
ب- عين قيمة العدد الحقيقي λ بحيث يكون : $A(\lambda)=\dfrac{1}{2}cm^2$

الموضوع الثاني

التمرين الأول(4,5 ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1=\sqrt{e}$ و من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

1) أحسب كلا من u_2 ، u_3 و u_4 (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2) أ) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$ يكون $u_n\leq n+3$

ب) بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ، ثم بين أن من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$$u_n=n+\left(\sqrt{e}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$: $S_n=\left(\frac{2}{3}\right)v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+......+\left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ ؛ $S'_n=u_1+u_2+.....+u_n$ و $T_n=\frac{S'_n}{n^2}$

عبر عن S_n و S'_n بدلالة n ثم عين $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

التمرين الثاني(4,5 ن):

1) نعتبر في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E)............7x-3y=1$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا

ب- حل المعادلة (E)

ج- برهن أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن العددين : x و y أوليين فيما بينهما

2) ليكن a و b عددين صحيحين يحققان العلاقة : $(E')......7a-3b=29$

أ- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين : a و b
ما هي القيم الممكنة للعدد d ؟

ب- عين الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الصحيحة حلول الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\end{cases}$

ج- ليكن m المضاعف المشترك الأصغر للعددين : a و b

حل الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ d=29\\ m=1044\end{cases}$

3) حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ الجملة : $\begin{cases}7a-3b=29\\ p\gcd(a;b)=1\end{cases}$

التمرين الثالث(4 ن):

عين في كل حالة مما يلي الإجابة الوحيدة الصحيحة مع التبرير :

1) المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ: $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = 2U_n - n$ حدها العام على $\mathbb{N}$ هو :

أ) $U_n = 2^n + n + 1$ ب) $U_n = 2^n + n + 2$ جـ) $U_n = 2^n - n + 1$

2) (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $2U_{n+1} = U_n + 2000$

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية العددية (V_n) كما يلي : $V_n = \frac{1}{2}U_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي

إن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (V_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ هي :

أ) $\alpha = 1000$ ب) $\alpha = 500$ جـ) $\alpha = -500$

3) إن مجموعة حلول المعادلة $ln(2e^x - 1) = 2x$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ) $S = \{0\}$ ب) $S = \{0,1\}$ جـ) $S = \phi$

4) إن $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{e^x - 3}{e^{2x} + 7}\right) + x$ تساوي

أ) e ب) 1 جـ) 0

التمرين الرابع (7ن) :

I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x) = 1 + (1-x)e^x$

1) ادرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0;+\infty[$

3) تحقق أن : $1,27 < \alpha < 1,28$ ، ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = \frac{e^x + x + 1}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2\,cm$

1) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة بيانيا

2) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f)

3) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') حيث $y = 1$ معادلة لـ (Δ')

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب- بين أن $f(\alpha) = \alpha$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

5) أ- أثبت أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

ب- أثبت أن (C_f) يقبل مماسا (T) في النقطة $M(-\alpha,0)$ موازيا للمستقيم (Δ)

جـ- اكتب معادلة لـ (T)

6) أنشئ (Δ) ، (Δ') ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي ، ناقش حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x + f(m)$

تصحيح باك تجريبي في الرياضيات
3 ت ر

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 ن)

$u_{n+1}=u_n(2-u_n)$ و $u_0=\frac{1}{8}$

① $D=\mathbb{R}$; $f(x)=x(2-x)$

أ) $f'(x)=-2x+2$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
$-2x+2$	$+$ 0 $-$

f متزايدة تماما على $]0,1[$

ب) من أجل $x\in]0,1[$

$0<x<1$ و f متزايدة تماما على $]0,1[$

$f(0)<f(x)<f(1)$ أي $0<f(x)<1$

أي $f(x)\in]0,1[$

② أ) $u_1=u_0(2-u_0)=f(u_0)=\frac{15}{64}$

$u_2=u_1(2-u_1)=f(u_1)=\frac{1655}{4096}$

ب) البرهان بالتراجع أن $0<u_n<1$

$n=0$: $0<u_0=\frac{1}{8}<1$

$P(0)$ صحيحة.

نفرض صحة $P(n)$: $0<u_n<1$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $0<u_{n+1}<1$ ؟

$0<u_n<1$ و f متزايدة تماما على $]0,1[$

فإن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ أي

$0<u_{n+1}<1$ وهو المطلوب

من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<1$

نقول إن (u_n) محدودة

جـ) من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}-u_n=u_n-u_n^2=u_n(1-u_n)$

$-1<-u_n<0$ ومنه $0<u_n<1$

ومنه $0<1-u_n<1$ اذن

$u_{n+1}-u_n>0$ اي $u_n(1-u_n)>0$

(u_n) متزايدة تماما.

* (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

③ $v_n=1-u_n$

أ) لدينا

$v_{n+1}=1-u_{n+1}$

$=1-u_n(2-u_n)$

أي $v_{n+1}=1-2u_n+u_n^2$

$=(1-u_n)^2=v_n^2$

ب) البرهان بالتراجع أن: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$n=0$: $v_0=1-u_0=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

و $v_0=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}=\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{7}{8}$ أي $P(0)$ صحيحة

نفرض صحة $P(n)$: $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ ؟

لدينا $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$ ومنه $v_n^2=\left(\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right)^2$

أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n\times 2}$ أي $v_n^2=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

أي $v_{n+1}=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ نعلم $v_{n+1}=v_n^2$

من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

جـ) استنتاج عبارة u_n بدلالة n

نعلم $v_n=1-u_n$

$u_n=1-v_n$

$=1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=\boxed{1}$ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}=0\end{cases}$ $(-1<\frac{7}{8}<1)$

د) أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n>1-10^{-20}$

تعني $1-\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}>1-10^{-20}$ تعني $\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<10^{-20}$

تعني $\ln\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}<\ln 10^{-20}$ تعني

تعني $2^n\ln\left(\frac{7}{8}\right)<-20\ln 10$ تعني $2^n>\frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}$

تعني $\ln 2^n>\ln\left(\frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}\right)$ تعني

أي $n\ln 2>\ln\left(\frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}\right)$ ، $n>\frac{\ln\left(\frac{-20\ln 10}{\ln 7/8}\right)}{\ln 2}$

$n>5{,}11$ ومنه أصغر عدد طبيعي $n=6$

هـ) $P(n)=v_0\times v_1\times\dots\times v_n$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0}\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^1}\times\dots\times\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^0+2^1+\dots+2^n}$ مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

$=\left(\frac{7}{8}\right)^{1\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)}$

$P(n)=\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}P(n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}-1}=0$ $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}2^{n+1}-1=+\infty\\ -1<\frac{7}{8}<1\end{cases}$

التمرين الثاني (04 ن)

① بواقي قسمة 5^n على 7

$5^1\equiv5[7]$ $5^2\equiv4[7]$ $5^3\equiv6[7]$ $5^4\equiv2[7]$ $5^5\equiv3[7]$ $5^6\equiv1[7]$

البواقي دورية ودورها 6

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]

② استنتاج باقي قسمة $A=2020^{1441}+1962^{1954}+1954^{1962}$ على 7 لدينا

$2020\equiv4[7]$ ولدينا من (1) $5^2\equiv4[7]$

والخاصية إذا كان $a\equiv b[n]$ فإن $b\equiv a[n]$

إذن $4\equiv5^2[7]$ منه $2020\equiv5^2[7]$

ومنه $2020^{1441}\equiv(5^2)^{1441}[7]$

$\equiv5^{2882}[7]$

و $2882=6(480)+2$ الشكل $6k+2$

إذن $2020^{1441}\equiv4[7]$

ولدينا $1962\equiv2[7]$ ولدينا من (1) $5^4\equiv2[7]$

إذن $2\equiv5^4[7]$ ومنه $1962\equiv5^4[7]$

إذن $1962^{1954}\equiv(5^4)^{1954}[7]$

$\equiv5^{7816}[7]$

و $7816=6(1302)+4$ الشكل $6k+4$

إذن $1962^{1954}\equiv2[7]$

منه $1954\equiv1[7]$ إذن $1954^{1962}\equiv1[7]$

إذن $A\equiv4+2+1[7]$

$\equiv0[7]$

الباقي هو 0

③ من أجل كل عدد طبيعي n :

$2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1}\equiv0[7]$ ؟

$2020\equiv5^2[7]$ منه $2020^{3n+1}\equiv(5^2)^{3n+1}[7]$

$\equiv5^{6n+2}[7]$

$\equiv4[7]$

$1962\equiv5^4[7]$ منه $1962^{3n+1}\equiv(5^4)^{3n+1}[7]$

$\equiv5^{12n+4}[7]$

$\equiv(5^{6n+2})^2[7]$

$\equiv4^2[7]$

$\equiv2[7]$

$1954\equiv1[7]$ منه $1954^{3n+1}\equiv1[7]$

إذن $2020^{3n+1}+1962^{3n+1}+1954^{3n+1} \equiv 4+2+1\ [7]$

$\equiv 0\ [7]$

4) من أجل كل عدد طبيعي n :

$S_n = 1+5+5^2+\dots+5^n$ مجموع $n+1$ حدا من متتالية هندسية

$= 1\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$

$S_n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$

ومنه $4S_n = 5^{n+1}-1$

ب) a عدد حقيقي :

$S_n \equiv 2a\ [7]$ إذا وفقط إذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$

1) إذا كان $4S_n \equiv a\ [7]$ فإن $8S_n \equiv 2a\ [7]$

و $8 \equiv 1\ [7]$ فإن $S_n \equiv 2a\ [7]$

2) إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$ فإن $4S_n \equiv 8a\ [7]$

و $8 \equiv 1\ [7]$ فإن $4S_n \equiv a\ [7]$

نستنتج أن $4S_n \equiv a\ [7]$ إذا وفقط إذا كان $S_n \equiv 2a\ [7]$

جـ) استنتاج باقي قسمة S_{2020} على 7 :

لدينا $4S_n = 5^{n+1}-1$

ومنه $4S_{2020} = 5^{2021}-1$

لدينا $2021 = 6(336)+5$ من الشكل $6k+5$

إذن $4S_{2020} \equiv 3-1\ [7]$

$\equiv 2\ [7]$

بما أن $4S_{2020} \equiv 2\ [7]$ فإن $S_{2020} \equiv 4\ [7]$

ومنه الباقي هو : 4

التمرين الثالث (04)

6 بيضاء ← 2,1,1,0,0,0

2 سوداء ← 1,0

8

1) نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

عدد الحالات $A_8^2 = 56$

حساب الاحتمال

A : نفس اللون

$P(A) = \frac{A_6^2 + A_2^2}{56} = \frac{4}{7}$

B : جداء العددين المسجلين معدوم

$P(B) = \frac{A_4^2 + A_4^1 \times A_4^1 \times 2}{56}$ $\begin{cases} 0\times 0 = 0 \\ 0\times \text{عدد} = 0 \end{cases}$

$= \frac{11}{14}$

2) نسحب كرتين في آن واحد

عدد الحالات $C_8^2 = 28$

C : مجموع العددين يكون أوليا

$P(C) = \frac{C_4^1 \times C_1^1 + C_3^2 + C_3^1 \times C_1^1}{28}$ $\begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \\ 1+2=3 \end{cases}$

$= \frac{5}{14}$

ب) X يرفق بكل نتيجة سحب مجموع العددين

قيم X هي : $\{0,1,2,3\}$

قانون احتمال X

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$3/14$	$3/7$	$1/4$	$3/28$

$P(X=0) = \frac{C_4^2}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14}$ $0+0=0$

$P(X=1) = \frac{C_4^1 \times C_3^1}{28} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$ $0+1=1$

$P(X=2) = \frac{C_4^1 \times C_1^1 + C_3^2}{28} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$ $\begin{cases} 0+2=2 \\ 1+1=2 \end{cases}$

$P(X=3) = \frac{C_3^1 \times C_1^1}{28} = \frac{3}{28}$ $1+2=3$

الأمل الرياضي

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = \frac{5}{4}$

جـ) $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2$

$= (0^2 \times \frac{3}{4}) + (1^2 \times \frac{3}{7}) + (2^2 \times \frac{1}{4}) + (3^2 \times \frac{3}{28})$

$E(X^2) = \frac{67}{28}$

التمرين الرابع (08)

I) $g(x) = 2x^2+1-\ln|x|$

$D =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

1) دراسة تغيرات g

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(-x)}{(-x)^2}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left[2+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right] = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x^2+1-\ln|x| = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$

g متناقصة تماما على $]-\infty,-\frac{1}{2}]$ و $]0,\frac{1}{2}]$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$+\infty$
$4x^2-1$		+	0	−	‖	−	0	+	
x		−		−	‖	+		+	
$g'(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	

و متزايدة تماما على $[-\frac{1}{2},0[$ و $[\frac{1}{2},+\infty[$

x	$-\infty$		$-1/2$		0		$1/2$		$+\infty$
$g'(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$2{,}19$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$2{,}19$	↗	$+\infty$

2) إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		+	‖	+	

II) $f(x) = 2x-2+\frac{\ln|x|}{x}$

$D =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x-2-\frac{\ln(-x)}{(-x)} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x-2+\frac{\ln x}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ معادلة م م موازي لحامل محور التراتيب

2) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$

$f'(x) = 2+\frac{\frac{1}{x}x-\ln|x|}{x^2}$

$= 2+\frac{1-\ln|x|}{x^2} = \frac{2x^2+1-\ln|x|}{x^2}$

بما أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ومنه f متزايدة تماما على $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	‖	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3) (Δ) معادلته $y=2x-2$

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(2x-2) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$

(Δ) ذو المعادلة $y=2x-2$ م م مائل لـ (C_f)

الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-(2x-2) = \frac{\ln|x|}{x}$

$\ln|x|=0$ تعني $|x|=1$ تعني

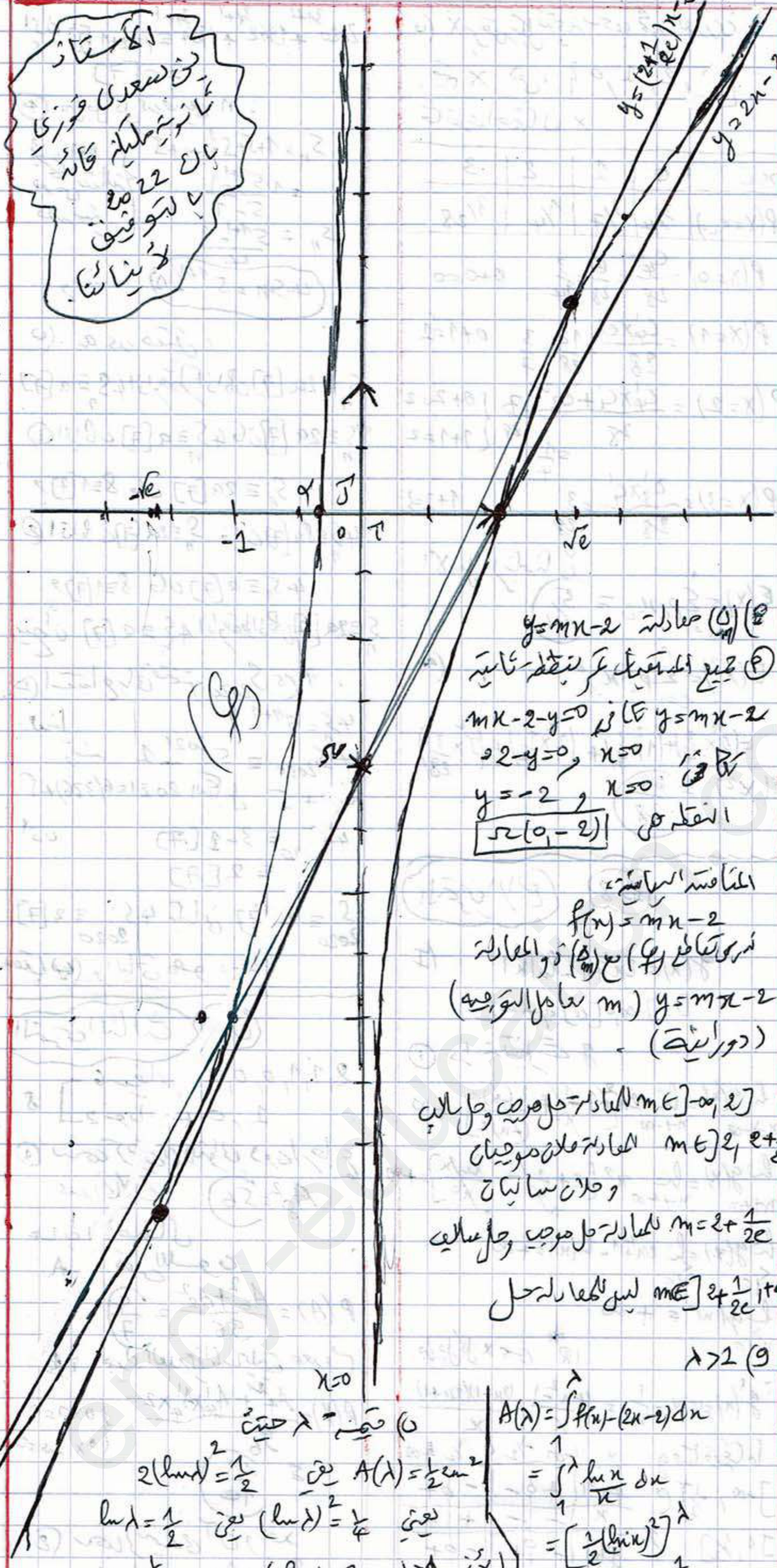
$x=1$ أو $x=-1$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\ln\|x\|$		+	0	−	‖	−	0	+	
x		−		−	0	+		+	
$\frac{\ln\|x\|}{x}$		−	0	+	‖	−	0	+	
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	‖	(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

نقطتا التقاطع لـ (C_f) و (Δ) هما

$M_1(-1,-4)$ $M_2(1,0)$

الأستاذ بن سعدي فوزي
ثانوية طلبة عائشة باتنة 22 ص ع
بالتوفيق لأبنائنا



4) معادلة (Δ_m): $y=mx-2$

جميع المستقيمات تمر بنقطة ثابتة

$y=mx-2$ أي $mx-2-y=0$

$x=0$ و $-2-y=0$ أي $x=0$ و $y=-2$

النقطة هي $\boxed{\Omega(0,-2)}$

المناقشة البيانية

$f(x)=mx-2$

ندرس تقاطع (C_f) مع (Δ_m) ذو المعادلة $y=mx-2$ (m معامل التوجيه) (دورانية).

$m\in]-\infty,2]$ المعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2,2+\frac{1}{2e}[$ المعادلة حلان موجبان وحلان سالبان

$m=2+\frac{1}{2e}$ المعادلة حل موجب وحل سالب

$m\in]2+\frac{1}{2e},+\infty[$ ليس للمعادلة حل

9) $\lambda>1$

$A(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)-(2x-2)\,dx$

$=\int_1^{\lambda}\frac{\ln x}{x}\,dx$

$=\left[\frac12(\ln x)^2\right]_1^{\lambda}$

$=\frac12(\ln\lambda)^2-\frac12(\ln 1)^2$

$A(\lambda)=\frac12(\ln\lambda)^2$ u.a

وبـ cm^2 نجد

$A(\lambda)=4\times\frac12(\ln\lambda)^2=2(\ln\lambda)^2\,cm^2$

ت) تعيين λ حيث $A(\lambda)=\frac12 cm^2$ يعني $2(\ln\lambda)^2=\frac12$

يعني $(\ln\lambda)^2=\frac14$ يعني $\ln\lambda=\frac12$

(لأن $\lambda>1$ و $\ln\lambda>0$) يعني $\lambda=e^{1/2}$

$\boxed{\lambda=\sqrt{e}}$

لأجل كل x من IR^*،

$f(-x)+f(x)=-2x-2-\frac{\ln|x|}{x}+2x-2+\frac{\ln|x|}{x}$
$=-4$

إذن النقطة $\Omega(0,-2)$ مركز تناظر (C_f)

3) (C_f) يقبل مماسا يمر بالنقطة Ω

$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$-2=f'(x_0)(0-x_0)+f(x_0)$

لدينا $f(x_0)=2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$f'(x_0)=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}$

$-2=\frac{2x_0^2+1-\ln|x_0|}{x_0^2}(-x_0)+2x_0-2+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$\cancel{-2}=\frac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|}{x_0}+2x_0\cancel{-2}+\frac{\ln|x_0|}{x_0}$

$0=\frac{-2x_0^2-1+\ln|x_0|+2x_0^2+\ln|x_0|}{x_0}$

$\frac{2\ln|x_0|-1}{x_0}=0$

يعني $2\ln|x_0|-1=0$ يعني $\ln|x_0|=\frac12$

أي $|x_0|=e^{1/2}$ يعني $x_0=\sqrt{e}$ أو $x_0=-\sqrt{e}$

النقطتان هما

$M_1(\sqrt{e},2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e})$ $M_2(-\sqrt{e},-2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e})$

معادلة (T): $f'(\sqrt{e})=2+\frac{1}{2e}$

$y=(2+\frac{1}{2e})(x-\sqrt{e})+2\sqrt{e}-2+\frac{\sqrt{e}}{2e}$

$\boxed{y=(2+\frac{1}{2e})x-2}$

x	0	$\sqrt{e}$
y	-2	$1,60$

6) $f(x)=0$ تقبل حلين.

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و $f(1)=0$ اذن 1 حل وحيد في $]0,+\infty[$

(*) f مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0,37;-0,36]$

$f(-0,36)=0,1179$ $f(-0,37)=-0,052$

$f(-0,37)\times f(-0,36)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,37<\alpha<-0,36$

$f(\alpha)=0$ محقق

7) الرسم

نقط مساعدة.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$-8,4$	$-6,3$	-4	0	$2,35$	$4,37$

تصحيح اختبار في الرياضيات
3 ت ر
الموضوع الثاني.

التمرين الأول (04,5)

$u_1=\sqrt{e}$ و $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

① $u_2=\frac{2}{3}u_1+\frac{1}{3}+1=2,43$

$u_3=\frac{2}{3}u_2+\frac{2}{3}+1=3,29$

$u_4=\frac{2}{3}u_3+\frac{3}{3}+1=4,19$

التخمين: (u_n) متزايدة

② أ) البرهان بالتراجع $n\geq 1$: $u_n\leq n+3$

$n=1$: $u_1=\sqrt{e}$

$1+3=4$

$\sqrt{e}\leq 4$ و $P(1)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة: $u_n\leq n+3$

نبرهن صحة $P(n+1)$: $u_{n+1}\leq n+4$ ؟

$u_n\leq n+3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n\leq\frac{2}{3}n+2$

ومنه $\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1\leq\frac{2}{3}n+2+\frac{1}{3}n+1$

ومنه $u_{n+1}\leq n+3$

و $n+3<n+4$

إذن $u_{n+1}\leq n+4$

من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$; $u_n\leq n+3$

ب) من أجل كل $n\geq 1$

$u_{n+1}-u_n=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1-u_n$

$=-\frac{1}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1$

$=\frac{1}{3}(n+3-u_n)$

لدينا $u_n\leq n+3$ يعني $n+3-u_n\geq 0$

ومنه $u_{n+1}-u_n\geq 0$ أي (u_n) متزايدة

3) من أجل كل $n\geq 1$: $v_n=u_n-n$

(v_n) هندسية يعني $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=u_{n+1}-(n+1)$

$=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+\cancel{1}-n-\cancel{1}$

$=\frac{2}{3}u_n-\frac{2}{3}n$

$=\frac{2}{3}(u_n-n)=\frac{2}{3}v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ ، حدها

الأول $v_1=u_1-1=\sqrt{e}-1$

تبيان أن $u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ؟

لدينا أولا $v_n=v_1\times q^{n-1}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

لدينا $v_n=u_n-n$ أي $u_n=v_n+n$ ومنه

$u_n=n+(\sqrt{e}-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

4) $S_n=\frac{2}{3}v_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2v_2+\dots+\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$

نضع $w_n=\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n$

لدينا $w_{n+1}=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}v_{n+1}$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}v_n$

$=\frac{4}{9}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^nv_n\right]=\frac{4}{9}w_n$

(w_n) هندسية أساسها $q'=\frac{4}{9}$ حدها

الأول $w_1=\frac{2}{3}v_1=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)$

$S_n=w_1+w_2+\dots+w_n$

$=w_1\left[\frac{1-q'^n}{1-q'}\right]$

$=\frac{2}{3}(\sqrt{e}-1)\left[\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\right]$

$S_n=\frac{6}{5}(\sqrt{e}-1)\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$

$S'_n=u_1+u_2+\dots+u_n$ $[u_n=v_n+n]$

$=(v_1+1)+(v_2+2)+\dots+(v_n+n)$

$=(v_1+v_2+\dots+v_n)+(1+2+\dots+n)$ حسابية

$=v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$=(\sqrt{e}-1)\left(\frac{1-(2/3)^n}{1-2/3}\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$S'_n=3(\sqrt{e}-1)\left(1-(2/3)^n\right)+\frac{n(n+1)}{2}$

$\lim_{n\to+\infty}T_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{S'_n}{n^2}$

$=\lim_{n\to+\infty}\frac{3(\sqrt{e}-1)\left(1-(2/3)^n\right)}{n^2}+\frac{n(n+1)}{2n^2}$

$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

التمرين الثاني (04,5)

① (E) $7y-3x=1$

أ) لدينا $PGCD(7,3)=1$ ، $1|1$

فإن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

ب) حل المعادلة (E)

لدينا $(1,2)$ حل لـ (E) لأن

$7(1)-3(2)=1$ ، ومنه

$\begin{cases}7x-3y=1\\7(1)-3(2)=1\end{cases}$ أي $7x-3y=7(1)-3(2)$

ومنه $7(x-1)=3(y-2)$

$PGCD(7,3)=1$ و $7|3(y-2)$

حسب غوص $7|y-2$ أي $y-2=7k$

ومنه $y=7k+2$

و $7(x-1)=3(7k)$ أي

$x-1=3k$ ومنه $x=3k+2$

$S=\{(3k+1,7k+2),k\in\mathbb{Z}\}$

ج) إذا كانت (x,y) حلا لـ (E)

هذا يعني $7x-3y=1$ ، حسب

نظرية بيزو تكون x و y أوليين

فيما بينهما

② a ، b عددان صحيحان طبيعيان

(E') ---- $7a-3b=29$

أ) $PGCD(a,b)=d$

$\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$ لدينا $\begin{cases}d|7a\\d|3b\end{cases}$

ومنه $d|7a-3b$ أي $d|29$

ومنه $d\in\{1,29\}$

ب) الثنائيات الصحيحة (a,b) حيث

$\begin{cases}7a-3b=29\\d=29\end{cases}$

لدينا $d=29$ يعني يوجد a' و b'

طبيعيان $a=29a'$ و $b=29b'$

حيث $PGCD(a',b')=1$ لدينا

$7(29a')-3(29b')=29$

أي $7a'-3b'=1$

ومن السؤال 1) ب) نجد

$a'=3k+1$, $b'=7k+2$

إذن $a=87k+29$

$b=203k+58$

$S=\{(87k+29,203k+58)/k\in\mathbb{Z}\}$

ج) $PPCM(a,b)=m$

$m=\frac{a\times b}{d}=\frac{29a'\times 29b'}{29}=29a'b'$

لدينا الجملة
$$\begin{cases} 7a-3b=29 \\ d=29 \\ m=1044 \end{cases}$$ أي

$a'\times b'\times 29=1044$ يعني $\boxed{a'\times b'=36}$

و لدينا $7a-3b=29$ ومنه $\boxed{7a'-3b'=1}$

لدينا $a'\times b'=36$ و منه $a'=\frac{36}{b'}$

$7\left(\frac{36}{b'}\right)-3b'=1$

تكافئ $\frac{-3b'^2+252}{b'}=1$

تكافئ $-3b'^2-b'+252=0$

$\Delta=3025$ ، $b'_1=9$ مقبول ، $b'_2=\frac{-28}{3}$ مرفوض

$b'=9$ تكافئ $a'=4$ ومنه

$a=116$ ، $b=261$

$S=\{(116,261)\}$

③ حل في $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
$$\begin{cases} 7a-3b=29 \\ PGCD(a,b)=1 \end{cases}$$

$7a-3b=29$ تكافئ $7a=29+3b$

$7a\equiv 29[3]$ تكافئ $a\equiv 2[3]$

أي $\boxed{a=3\alpha+2}$ ، ومنه

أي $7(3\alpha+2)=29+3b$

أي $7(3\alpha)-15=3b$

$7\alpha-5=b$

$\boxed{b=7\alpha-5}$ $(\alpha\in\mathbb{Z})$

لدينا $PGCD(a,b)=1$

باستعمال خوارزمية اقليدس لدينا

$PGCD(a,b)=PGCD(b,r)$

$7\alpha-5=2(3\alpha+2)+\alpha-9$ $\quad \begin{array}{c|c} 7\alpha-5 & 3\alpha+2 \\ \hline \alpha-9 & 2 \end{array}$

$3\alpha+2=3(\alpha-9)+29$ $\quad \begin{array}{c|c} 3\alpha+2 & \alpha-9 \\ -3\alpha+27 & 3 \\ \hline 29 & \end{array}$

$PGCD(7\alpha-5,3\alpha+2)=PGCD(\alpha-9,29)$

ولدينا $PGCD(a,b)=1$

معناه $PGCD(\alpha-9,29)=1$

معناه $\alpha-9\not\equiv 0[29]$ أي $\alpha\not\equiv 9[29]$

$S=\{(3\alpha+2,7\alpha-5);\ \alpha\in\mathbb{Z},\alpha\not\equiv 9[29]\}$

التمرين 3 (4ن)

① $u_0=2$ و $u_{n+1}=2u_n-n$

برهان بالتراجع: P: $u_n=2^n+n+1$ من أجل

$u_{n+1}-2u_n=2^{n+1}+n+1+1-2(2^n+n+1)$
$=\cancel{2^{n+1}}+n+\cancel{2}-\cancel{2^{n+1}}-2n-\cancel{2}$
$=\boxed{-n}$

② $v_n=\frac{1}{2}u_n-\alpha$ و $2u_{n+1}=u_n+2000$

تعيين α حتى (v_n) هندسية: $\boxed{\alpha=1000}$ لدينا

$v_{n+1}=\frac{1}{2}u_{n+1}-\alpha$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n+1000\right)-\alpha$
$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u_n+1000-2\alpha\right]$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}u_n-\alpha+1000-\alpha\right)$
$=\frac{1}{2}v_n+\frac{1000-\alpha}{2}$

(v_n) هندسية معناه $\frac{1000-\alpha}{2}=0$ ومنه $1000-\alpha=0$ و منه $\alpha=1000$

③ تحديد حلول المعادلة

$\ln(2e^x-1)=2x$ هي (P) $S=\{0\}$

لأن المعادلة معرفة حيث $2e^x-1>0$

أي $2e^x>1$ أي $e^x>\frac{1}{2}$

أي $x>\ln\frac{1}{2}$ ، $D=]\ln\frac{1}{2};+\infty[$

$\ln(2e^x-1)=2x$ تكافئ $2e^x-1=e^{2x}$

تكافئ $e^{2x}-2e^x+1=0$ أي

$(e^x-1)^2=0$ تكافئ $e^x-1=0$

أي $e^x=1$ أي $\boxed{x=0}$

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x$

تساوي $\boxed{0}$ لأن

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+x=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\right)+\ln(e^x)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^x-3}{e^{2x}+7}\times e^x\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}-3e^x}{e^{2x}+7}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{e^{2x}(1-3e^{-x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1-3e^{-x}}{1+e^{-2x}}\right)$

$=\ln 1=0$

التمرين الرابع (7ن)

I) $g(x)=1+(1-x)e^x$ ، $D=]-\infty;+\infty[$

① دراسة تغيرات g

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}1+e^x-xe^x=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

من أجل x من $\mathbb{R}$

$g'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x$

x	$-\infty$		0		α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow -\infty$

② لدينا g مستمرة ومتناقصة تماما على $[0;+\infty[$ و $2\times\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α على $[0,+\infty[$

③ لدينا $g(1{,}27)=0{,}038$
$g(1{,}28)=-0{,}007$

اذن $g(1{,}27)\times g(1{,}28)<0$

$g(\alpha)=0$ تعني $1{,}27<\alpha<1{,}28$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) $f(x)=\frac{e^x+x+1}{e^x+1}$

$D=]-\infty,+\infty[$

① $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{x}{e^x}+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$

$=\boxed{1}$

يعني $y=1$ معادلة م أ مقارب

2) أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1}{e^x+1}-(x+1)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x+x+1-xe^x-e^x-x-1}{e^x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-xe^x}{e^x+1}=0$

اذن (Δ) معادلته $y=x+1$ م م مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

3) الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

$f(x)-(x+1)=\frac{-xe^x}{e^x+1}$

الإشارة من إشارة $-x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$-x$	$+$	0	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)

(C_f) يقطع (Δ) في $A(0,1)$

الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ') ذو المعادلة $y=1$

$f(x)-1=\frac{x}{e^x+1}$ إشارة من إشارة x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ')		(C_f) فوق (Δ')

(C_f) يقطع (Δ') في $A(0,1)$

4) أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)(e^x+1)-e^x(e^x+x+1)}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{\cancel{e^{2x}}+2e^x+1-\cancel{e^{2x}}-xe^x-e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{1+(1-x)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

f متزايدة تماما على $]-\infty,\alpha]$

f متناقصة تماما على $[\alpha,+\infty[$

ب) $f(\alpha)=\alpha$ ؟

لدينا $f(\alpha)=\frac{e^\alpha+\alpha+1}{e^\alpha+1}$ و $g(\alpha)=0$

يعني $1+(1-\alpha)e^\alpha=0$ أي $(1-\alpha)e^\alpha=-1$

أي $e^\alpha=\frac{-1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$

$$f(\alpha)=\frac{\frac{1}{\alpha-1}+\alpha+1}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\frac{\frac{\alpha^2}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}}=\frac{\alpha^2}{\alpha}=\boxed{\alpha}$$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	α	$\searrow 1$

5) أ) (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\alpha$

$f(-\alpha)=\frac{e^{-\alpha}-\alpha+1}{e^{-\alpha}+1}$ و $e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$ يعني $\frac{1}{e^\alpha}=\alpha-1$ يعني $e^{-\alpha}=\alpha-1$

$$=\frac{\alpha-1-\alpha+1}{\alpha-1+1}=0$$

إذن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة $M(-\alpha,0)$

ب) (C_f) يقبل مماسا (T) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ)

$$f'(-\alpha)=\frac{g(-\alpha)}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)e^{-\alpha}}{(e^{-\alpha}+1)^2}=\frac{1+(1+\alpha)(\alpha-1)}{(e^{-\alpha}+1)^2}$$
$$f'(-\alpha)=\frac{\alpha^2}{(\alpha-1+1)^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2}=\boxed{1}$$

(T) مماس (C_f) في $M(-\alpha,0)$ يوازي (Δ) لأن لهما نفس معامل التوجيه : 1

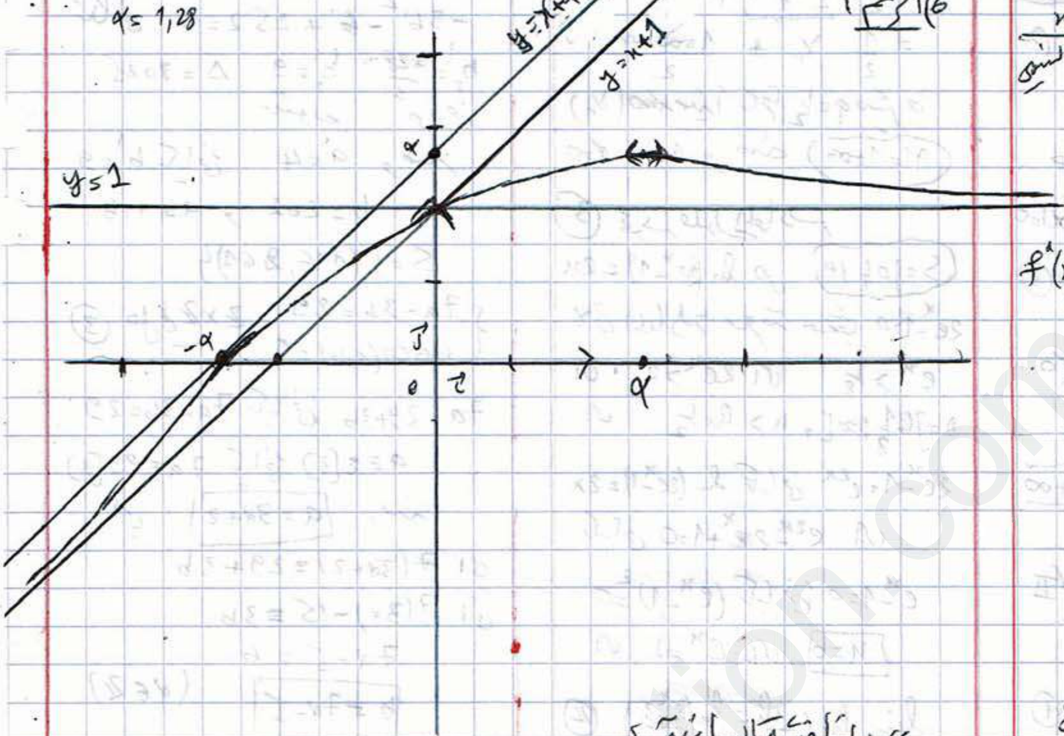
جـ) معادلة لـ (T)

x	$-\alpha$	0
y	0	α

$y=f'(-\alpha)(x+\alpha)+f(-\alpha)=\boxed{x+\alpha}$

$\alpha\simeq 1{,}28$

6) الرسم :



6) المناقشة البيانية :

$f(x)=x+f(m)$

ندرس تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+f(m)$ الموازي لكل من (Δ) و (T)

* $f(m)<1$ يعني $m<0$ للمعادلة حل واحد موجب
* $f(m)=1$ يعني $m=0$ للمعادلة حل واحد معدوم
* $1<f(m)<\alpha$ أي $m\in]0,\alpha[\cup]\alpha,+\infty[$ للمعادلة حلين سالبين
* $f(m)=\alpha$ أي $m=\alpha$ للمعادلة حل مضاعف $x=-\alpha$

الأستاذ : بن لسعدي فوزي
ثانوية مليكة قايد - سطيف
سنة 2022
بالتوفيق لأبنائنا