

أولمبياد الثالث والعشرون

تمرين 1

x عدد حقيقي غير منعدم ($x \neq 0$) بحيث : $\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{3}$

بين أن : $\frac{x^3}{x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{29}$

تمرين 2

a و b و c أطوال أضلاع مثلث

1- بين أن $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2$

2- بين أن : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$

3- استنتج أن : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{a+c-b} \leq a + b + \sqrt{c}$

تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $xy + yz + zx = \frac{xyz}{2}$

بين أن : $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} < \frac{1}{2}$

تمرين 4

x و y عدنان حقيقيان غير منعدمان بحيث : $\frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{1}{3}$

احسب $\frac{x}{y}$

حل أولمبياد الثالث والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3} \left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}$$

$$= \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{x} \right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)}$$

لنحدد قيمة $x + \frac{1}{x}$:

لدينا : $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{3}$ يعني : $\frac{\cancel{x}}{\cancel{x} \left(x + \frac{1}{x} \right)} = \frac{1}{3}$ يعني : $\frac{1}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{3}$

إذن : $x + \frac{1}{x} = 3$

لنحدد قيمة $x^2 + \frac{1}{x^2}$:

لدينا : $x + \frac{1}{x} = 3$ يعني : $\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = 3^2$ يعني : $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$

إذن : $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

لنحدد قيمة $x^3 + \frac{1}{x^3}$:

لدينا : $x + \frac{1}{x} = 3$ يعني : $\left(x + \frac{1}{x} \right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = 3 \times 7$ يعني : $x^3 + \left(\frac{1}{x} + x \right) + \frac{1}{x^3} = 21$

يعني : $x^3 + 3 + \frac{1}{x^3} = 21$ إذن : $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$

لدينا :

$$\frac{x^3}{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{1 + \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 + 3 + 7 + 18}$$

وبالتالي : $\frac{x^3}{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{1}{29}$

تمرين 2

1- لدينا :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2a}{2(b+c)} + \frac{2b}{2(c+a)} + \frac{2c}{2(a+b)}$$

$$= \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

لدينا : a و b و c أطوال أضلاع مثلث

يعني : $a+b > c$ و $c+a > b$ و $b+c > a$

يعني : $b+c+(b+c) > a+b+c$ و $c+a+(c+a) > b+c+a$ و $a+b+(a+b) > c+a+b$

يعني : $\frac{1}{b+c+(b+c)} < \frac{1}{a+b+c}$ و $\frac{1}{c+a+(c+a)} < \frac{1}{b+c+a}$ و $\frac{1}{a+b+(a+b)} < \frac{1}{c+a+b}$

يعني : $\frac{2a}{b+c+(b+c)} < \frac{2a}{a+b+c}$ و $\frac{2b}{c+a+(c+a)} < \frac{2b}{b+c+a}$ و $\frac{2c}{a+b+(a+b)} < \frac{2c}{c+a+b}$

إذن :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2a}{(b+c)+(b+c)} + \frac{2b}{(c+a)+(c+a)} + \frac{2c}{(a+b)+(a+b)}$$

$$< \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{b+c+a} + \frac{2c}{c+a+b} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$$

2- لدينا : $a+b > c$ و $c+a > b$ و $b+c > a$ يعني : $a+b-c > 0$ و $c+a-b > 0$ و $b+c-a > 0$

نضع : $z = b+c-a > 0$ و $y = c+a-b > 0$ و $x = a+b-c > 0$

يعني : $x+y = 2a$ و $x+z = 2b$ و $y+z = 2c$

إذن : $\sqrt{x+z} = \sqrt{2}\sqrt{b}$ و $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} = \sqrt{x} + \sqrt{z}$

لنبين أن : $\sqrt{x} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+z}$

لدينا : $2(x+z) - (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2 = 2x + 2z - x - 2\sqrt{x}\sqrt{z} - z = x - 2\sqrt{x}\sqrt{z} + z = (\sqrt{x} - \sqrt{z})^2 \geq 0$

يعني : $2(x+z) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2$

يعني : $\sqrt{2(x+z)} \geq \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{z})^2}$

إذن : $\sqrt{x} + \sqrt{z} \leq \sqrt{2}\sqrt{x+z}$

وبالتالي : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$

3- حسب السؤال السابق لدينا : $(1) \sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} \leq \sqrt{2}\sqrt{b}$

وبنفس الطريقة نبين أن : $(2) \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{2}\sqrt{c}$

و $(3) \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \leq \sqrt{2}\sqrt{a}$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$2\sqrt{a+b-c} + 2\sqrt{b+c-a} + 2\sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{2}\sqrt{b} + \sqrt{2}\sqrt{c} + \sqrt{2}\sqrt{a}$$

أي : $2(\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b}) \leq 2(\sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{a})$

وبالتالي : $\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$

تمرين 3

لدينا : $xy + yz + zx = \frac{xyz}{2}$

يعني : $\frac{xy + yz + zx}{xyz} = \frac{1}{2}$

يعني : $\frac{xy}{xyz} + \frac{yz}{xyz} + \frac{zx}{xyz} = \frac{1}{2}$

إذن : $(1) \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

لدينا : $2 > 0$

يعني : $2 > x - x$

يعني : $2 + x > x$

إذن : $(2) \frac{1}{2+x} < \frac{1}{x}$

بنفس الطريقة نبين أن : $(3) \frac{1}{2+y} < \frac{1}{y}$ و $(4) \frac{1}{2+z} < \frac{1}{z}$

نجمع المتفاوتات 2 و 3 و 4 نستنتج أن : $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

$$\text{من 1 و 5 نستنتج أن : } \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} < \frac{1}{2}$$

تمرين 4

$$\text{لدينا : } \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } \frac{\cancel{xy} \times \left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x} \right)}{\cancel{xy} \times \left(\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x} \right)} = \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } \frac{\frac{x}{y} - 1 + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{نضع : } k = \frac{x}{y}$$

$$\text{يعني : } \frac{k - 1 + \frac{1}{k}}{k + 1 + \frac{1}{k}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } \frac{\frac{k^2 - k + 1}{k}}{\frac{k^2 + k + 1}{k}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } \frac{k^2 - k + 1}{\cancel{k}} \times \frac{\cancel{k}}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } \frac{k^2 - k + 1}{k^2 + k + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } k^2 + k + 1 = 3k^2 - 3k + 3$$

$$\text{يعني : } 3k^2 - 3k + 3 - k^2 - k - 1 = 0 \quad \text{يعني : } 2k^2 - 4k + 2 = 0$$

$$\text{يعني : } 2(k^2 - 2k + 1) = 0 \quad \text{يعني : } k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$\text{يعني : } (k - 1)^2 = 0 \quad \text{يعني : } k - 1 = 0$$

$$\text{إذن : } k = 1$$

$$\text{وبالتالي : } \boxed{\frac{x}{y} = 1}$$