

أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

x و y و z أعدادا حقيقية غير منعدمة بحيث : $xz + yz + xy = 0$
بين أن : $\frac{x+y}{xy} + \frac{y+z}{yz} + \frac{z+x}{zc} = 0$

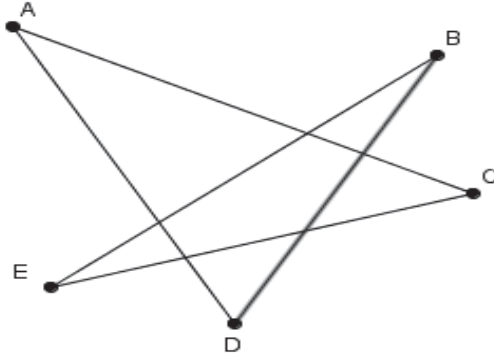
تمرين 2

ABC مثلث بحيث : $AB^4 - AC^4 = BC^2(AB^2 - AC^2)$ و $AB \neq AC$
بين أن المثلث ABC قائم الزاوية

تمرين 3

x و y و z أعدادا حقيقية موجبة غير منعدمة بحيث : $x < y + z$
بين أن : $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$

تمرين 4



نعتبر الشكل جانبه

بين أن $\hat{A} + \hat{D} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{C} = 180^\circ$

حل أولمبياد الثاني عشر

تمرين 1

لدينا :

$$\begin{aligned}
 \frac{x+y}{xy} + \frac{y+z}{yz} + \frac{z+x}{xc} &= \frac{z}{z} \times \frac{x+y}{xy} + \frac{x}{x} \times \frac{y+z}{yz} + \frac{y}{y} \times \frac{z+x}{xz} \\
 &= \frac{xz+yz}{xyz} + \frac{xy+xz}{xyz} + \frac{yz+xy}{xyz} \\
 &= \frac{xz+yz+xy+xz+yz+xy}{xyz} \\
 &= \frac{2xz+2yz+2xy}{xyz} \\
 &= \frac{2(xz+yz+xy)}{xyz} \\
 &= \frac{2 \times 0}{xyz} = 0
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x+y}{xy} + \frac{y+z}{yz} + \frac{z+x}{xc} = 0} \quad \text{إذن :}$$

تمرين 2

$$AB^4 - AC^4 = BC^2(AB^2 - AC^2) \quad \text{لدينا}$$

$$AB^4 - AC^4 = BC^2 \times AB^2 - BC^2 \times AC^2 \quad \text{يعني}$$

$$AB^4 - AC^4 - BC^2 \times AB^2 + BC^2 \times AC^2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(AB^2 - AC^2)(AB^2 + AC^2) - BC^2(AB^2 - AC^2) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(AB^2 - AC^2)(AB^2 + AC^2 - BC^2) = 0 \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 = 0 \quad \text{أو} \quad AB^2 - AC^2 = 0 \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{أو} \quad AB^2 = AC^2 \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{أو} \quad AB = AC \quad \text{يعني}$$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \text{إذن} \quad AB \neq AC$$

حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن المثلث ABC قائم الزاوية في A

تمرين 3

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+x} - \left(\frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \right) &= \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} - \frac{z}{1+z} \\ &= \frac{x(1+y)(1+z) - y(1+x)(1+z) - z(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{x + \cancel{xz} + \cancel{xy} + \cancel{xyz} - y - yz - \cancel{xy} - \cancel{xyz} - z - yz - \cancel{xz} - xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ &= \frac{x - y - z - 2yz - xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \end{aligned}$$

لدينا : $x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$ و $x < y+z$

إذن $(1+x)(1+y)(1+z) > 0$ و $-2yz - xyz < 0$ و $x - y - z < 0$

$$\text{ومنه : } \frac{x - y - z - 2yz - xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} < 0$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}$$

تمرين 4

نضع النقطة F تقاطع المستقيمين (AD) و (EB)

و نضع النقطة I تقاطع المستقيمين (AC) و (EB)

$$\text{لدينا : } \hat{A}IF + \hat{C}IE = 180 \text{ و } \hat{A}FI + \hat{B}FD = 180$$

$$\text{إذن : } \hat{C}IE = 180 - \hat{A}IF \text{ و } \hat{B}FD = 180 - \hat{A}FI$$

في المثلث DFB لدينا : $\hat{B}FD + \hat{D} + \hat{B} = 180$

$$\text{يعني : } (\hat{B}FD = 180 - \hat{A}FI) \quad 180 - \hat{A}FI + \hat{D} + \hat{B} = 180$$

$$\text{إذن : } (1) \quad \hat{A}FI = \hat{D} + \hat{B}$$

في المثلث CEI لدينا : $\hat{C}IE + \hat{E} + \hat{C} = 180$

$$\text{يعني : } (\hat{C}IE = 180 - \hat{A}IF) \quad 180 - \hat{A}IF + \hat{E} + \hat{C} = 180$$

$$\text{إذن : } (2) \quad \hat{A}IF = \hat{E} + \hat{C}$$

في المثلث AFI لدينا : $(3) \quad \hat{A} + \hat{A}FI + \hat{A}IF = 180^\circ$

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن : $\hat{A} + \hat{D} + \hat{B} + \hat{E} + \hat{C} = 180^\circ$

