

أولمبياد السادس

تمرين 1

x و y و z أعداد حقيقية موجبة ($x > 0$ و $y > 0$ و $z > 0$)

1- بين أن $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

2- استنتج أن : $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 6$

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية بحيث :

$$\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 \\ 8x + 4y - z = 7 \end{cases}$$

بين أن : $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

تمرين 3

في الشكل جانبه لدينا :

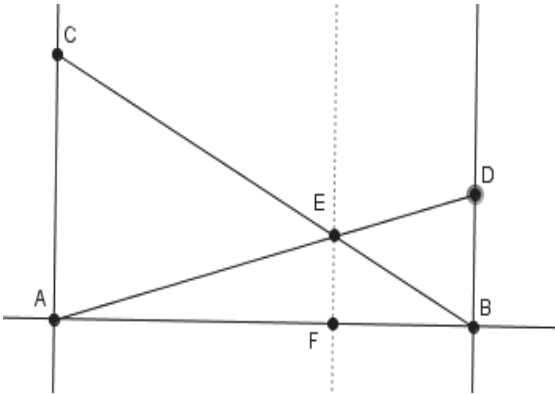
$AC = 8$ و $(AC) \parallel (BD)$

و $BD = 4$ و نقطة E

تقاطع (AD) و (BC)

و نقطة F من القطعة $[AB]$ بحيث $(EF) \parallel (BD)$

احسب EF



تمرين 4

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا و m عدد حقيقي

بحيث : $xyz = 1$ و $\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{yz+y+1} + \frac{2zm}{xz+z+1} = 1$

بين أن : $m = \frac{1}{2}$

حل أولمبياد السادس

تمرين 1

$$1 - \text{ لدينا : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2}{xy} - 2 = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$$

(لأن $(x-y)^2 \geq 0$ و $xy > 0$)

$$\text{إذن : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

$$2 - \text{ حسب السؤال السابق لدينا : } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (1)$$

$$(2) \quad \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2 \quad \text{بنفس الطريقة نبين أن}$$

$$(3) \quad \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 \quad \text{و}$$

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2 + 2 + 2$$

$$\text{أي : } \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 2 + 2 + 2$$

$$\text{إذن : } \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 6$$

تمرين 2

$$\begin{cases} x-7y+8z=4 & (1) \\ 8x+4y-z=7 & (2) \end{cases} \quad \text{نضع :}$$

$$\begin{cases} x-7y+8z=4 & (\times 2) \\ 8x+4y-z=7 & (\times 1) \end{cases} \quad \text{نضرب المعادلة (1) في 2 والمعادلة (2) في 1 :}$$

$$\begin{cases} 2x-14y+16z=8 \\ 8x+4y-z=7 \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف : $2x-14y+16z+8x+4y-z=8+7$

$$10x - 10y + 15z = 15 \quad \text{يعني}$$

$$10(x - y) = 15(1 - z) \quad \text{يعني}$$

$$(3) \quad x - y = \frac{15}{10}(1 - z) = \frac{3}{2}(1 - z) \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} x - 7y + 8z = 4 & (\times(-1)) \\ 8x + 4y - z = 7 & (\times 2) \end{cases} \quad \text{نضرب المعادلة (1) في -1 والمعادلة (2) في 2}$$

$$\begin{cases} -x + 7y - 8z = -4 \\ 16x + 8y - 2z = 14 \end{cases} \quad \text{أي}$$

$$-x + 7y - 8z + 16x + 8y - 2z = -4 + 14 \quad \text{نجمع المعادلتين المحصل عليهما طرف بطرف}$$

$$15x + 15y - 10z = 10 \quad \text{يعني}$$

$$15(x + y) = 10(1 + z) \quad \text{يعني}$$

$$(4) \quad x + y = \frac{10}{15}(1 + z) = \frac{2}{3}(1 + z) \quad \text{إذن}$$

$$(x - y) \times (x + y) = \frac{\cancel{3}}{2}(1 - z) \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}(1 + z) \quad \text{نضرب المتساويتان 3 و 4 بطرف}$$

$$x^2 - y^2 = 1 - z^2 \quad \text{يعني}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1 \quad \text{وبالتالي}$$

تمرين 3

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ABC :

$$(1) \quad \frac{BF}{BA} = \frac{EF}{AC} \quad \text{ومنه} \quad \frac{BF}{BA} = \frac{BE}{BC} = \frac{EF}{AC}$$

بتطبيق طاليس المباشرة في المثلث ADB :

$$(2) \quad \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{DB} \quad \text{ومنه} \quad \frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{EF}{DB}$$

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف نجد :

$$\frac{BF}{BA} + \frac{AF}{AB} = \frac{EF}{AC} + \frac{EF}{DB}$$

$$EF \left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{DB} \right) = \frac{BF + AF}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1 \quad \text{يعني}$$

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{DB} = \frac{1}{EF} \quad \text{إذن}$$

التطبيق العددي :

$$\frac{1}{EF} = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{4+8}{32} = \frac{12}{32}$$

$$EF = \frac{32}{12} = \frac{8}{3}$$

تمرين 4

بما أن $xyz=1$ فإن $yz = \frac{1}{x}$ و $xz = \frac{1}{y}$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{yz+y+1} + \frac{2zm}{xz+z+1} = 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{\frac{1}{x}+y+1} + \frac{2zm}{\frac{1}{y}+z+1} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2ym}{1+xy+x} + \frac{2zm}{1+yz+y} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yzm}{1+yz+y} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yxm}{1+\frac{1}{x}+y} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2yzm}{1+xy+x} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm}{xy+x+1} + \frac{2xym}{1+xy+x} + \frac{2xyzm}{1+xy+x} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2xm + 2xym + 2 \times 1 \times m}{xy+x+1} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{2m(x+xy+1)}{\cancel{xy+x+1}} = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$2m = 1 \quad \text{يعني :}$$

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{وبالتالي :}$$