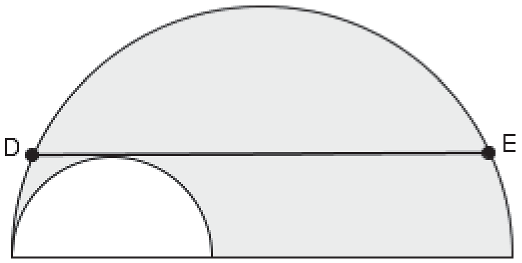
أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر الشكل جانبه بحيث :

المستقيم (DE) مماس للدائرة الصغيرة

و $DE = 8cm$

احسب S' مساحة المطقة المظللة

تمرين 2

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $x+\frac{1}{y}=10$ و $y+\frac{1}{z}=11$ و $z+\frac{1}{x}=12$

بين أن : $xyz+\frac{1}{xyz}=1287$

تمرين 3

EFG مثلث متساوي الساقين في E و A نقطة من $[FG]$

و $[FD]$ الإرتقاع الموافق للضلع $[EG]$

و النقطتان B و C هما المسقطان العموديان للنقطة A على (EF) و (EG) على التوالي

بين أن : $FD = AB + AC$

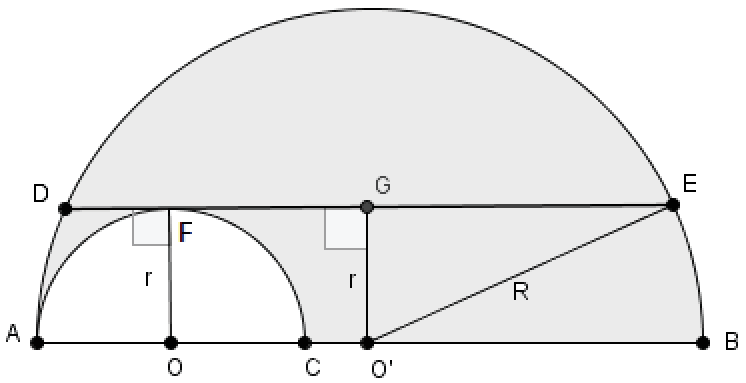
تمرين 4

x و y عددين حقيقيين

بين أن : $(x^2+1)(y^2+1) \geq x(y^2+1)+y(x^2+1)$

حل أولمبياد الحادي عشر

تمرين 1



نعتبر النقطة O' مركز الدائرة الكبيرة التي شعاعها R

و النقطة O مركز الدائرة الصغيرة التي شعاعها r

لدينا : $O'E = O'D = R$

إذن $(O'G)$ واسط القطعة $[DE]$

ومنه النقطة G منتصف $[DE]$

أي $GE = GD = 4cm$

لدينا المثلث $O'GE$ قائم الزاوية في G

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $O'E^2 = O'G^2 + GE^2$

أي : $R^2 = r^2 + 16$

مساحة المنطقة المظللة (S') = مساحة نصف الدائرة الكبيرة – مساحة نصف الدائرة الصغيرة

$$S' = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi(r^2+16)}{2} - \frac{\pi r^2}{2}$$
$$= \frac{\pi 16}{2}$$
$$= 8\pi$$

تمرين 2

لدينا : $x+\frac{1}{y}=10$ و $y+\frac{1}{z}=11$ و $z+\frac{1}{x}=12$

نجمع المتساويات طرف بطرف إذن : $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=33$

نضرب المتساويات طرف بطرف: $\left(x+\frac{1}{y}\right)\times\left(y+\frac{1}{z}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=1320$

يعني : $\left(xy+\frac{x}{z}+1+\frac{1}{yz}\right)\times\left(z+\frac{1}{x}\right)=1320$

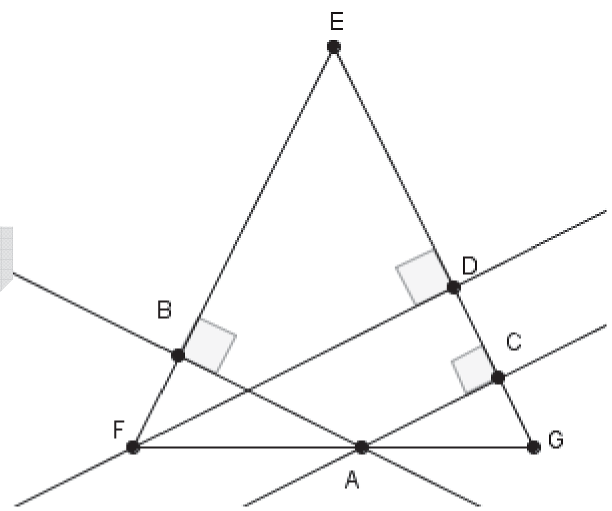
يعني : $xyz+y+x+\frac{1}{z}+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xyz}=1320$

يعني : $\left(xyz+\frac{1}{xyz}\right)+\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1320$

يعني : $\left(xyz+\frac{1}{xyz}\right)+33=1320$

وبالتالي : $xyz+\frac{1}{xyz}=1287$

تمرين 3



لدينا : $S_{EFG}=S_{EFA}+S_{EAG}$

(S_{EFG} : مساحة مثلث EFG ، S_{EFA} : مساحة مثلث EFA ، S_{EAG} : مساحة مثلث EAG)

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{AB\times EF}{2}+\dfrac{AC\times EG}{2}$

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{AB\times EF+AC\times EG}{2}$

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{AB\times EG+AC\times EG}{2}$ ($EF=EG$ لأن المثلث EFG متساوي الساقين في E)

يعني : $\dfrac{EG\times FD}{2}=\dfrac{EG(AB+AC)}{2}$

يعني : $\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\dfrac{\cancel{EG}\times FD}{\cancel{2}}=\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{EG}}\times\dfrac{\cancel{EG}(AB+AC)}{\cancel{2}}$

إذن : $FD=AB+AC$

<u>تمرين 4</u>

لدينا : $(x-1)^2=x^2-2x+1\geq 0$ و $(y-1)^2=y^2-2y+1\geq 0$

يعني : $x^2+1\geq 2x$ و $y^2+1\geq 2y$

يعني : $\dfrac{x^2+1}{2}\geq x$ و $\dfrac{y^2+1}{2}\geq y$

يعني : $\dfrac{(x^2+1)}{2}(y^2+1)\geq x(y^2+1)$ و $\dfrac{(y^2+1)}{2}(x^2+1)\geq y(x^2+1)$

نجمع المتفاوتتين طرف بطرف : $\dfrac{(x^2+1)}{2}(y^2+1)+\dfrac{y^2+1}{2}(x^2+1)\geq x(y^2+1)+y(x^2+1)$

يعني : $\dfrac{2(x^2+1)}{2}\times(y^2+1)\geq x\times(y^2+1)+y\times(x^2+1)$

إذن : $(x^2+1)\times(y^2+1)\geq x\times(y^2+1)+y\times(x^2+1)$