أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان مختلفان ($x \neq y$) و موجبان قطعا بحيث : $x+2y=3\sqrt{xy}$

احسب $\frac{x}{y}$

تمرين 2

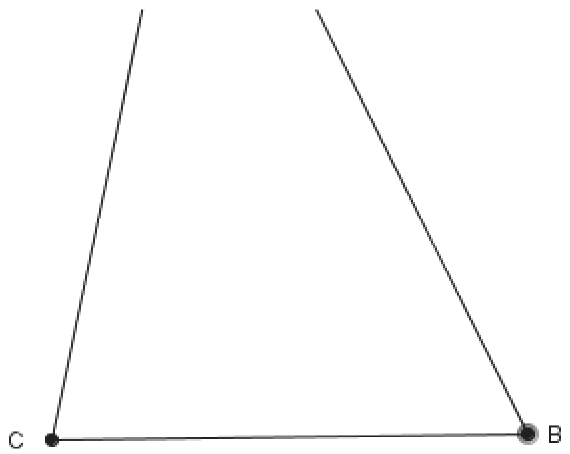
أراد محمد أن يرسم مثلثا ABC لكن

لاحظ أن الرأس A يوجد خارج الورقة

كماهو مبين في الشكل جانبه

ساعد محمد على رسم المتوسط الموافق

للضلع $[BC]$



تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية موجبة قطعا

1 – بين أن $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$

2 – أستنتج أن $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y} \leq \frac{x+y+z}{2}$

تمرين 4

EFG مثلث قائم الزاوية في F

بين أن : $EF+FG \leq \sqrt{2}EG$

حل أولمبياد الثالث عشر

تمرين 1

لدينا : $x+2y=3\sqrt{xy}$

يعني : $\frac{x+2y}{y}=\frac{3\sqrt{xy}}{y}$

يعني : $\frac{x}{y}+2=3\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{y^2}}$

يعني : $\frac{x}{y}+2=3\sqrt{\frac{xy}{y^2}}$

يعني : $\frac{x}{y}+2=3\sqrt{\frac{x}{y}}$

يعني : $\frac{x}{y}-3\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-2\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{x}{y}}+2=0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-2\right)-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-2\right)=0$

يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-2\right)\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-1\right)=0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}}-2=0$ أو $\sqrt{\frac{x}{y}}-1=0$

يعني : $\sqrt{\frac{x}{y}}=2$ أو $\sqrt{\frac{x}{y}}=1$

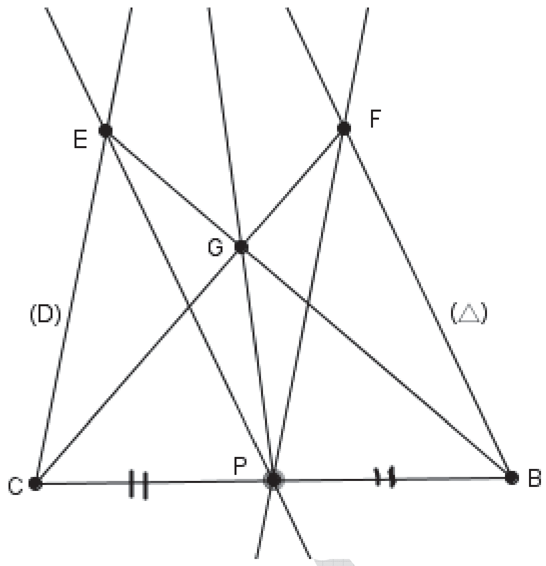
يعني : $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2=2^2$ أو $\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2=1^2$

يعني : $\frac{x}{y}=4$ أو $\frac{x}{y}=1$

ونعلم أن x و y عددان حقيقيان مختلفان إذن $\frac{x}{y}\neq 1$

وبالتالي : $\frac{x}{y}=4$

تمرين 2



– ننشئ النقطة P منتصف $[BC]$

– ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (Δ) ويقطع المستقيم (D) في النقطة E

– ننشئ المستقيم المار من P والموازي للمستقيم (D) ويقطع المستقيم (Δ) في النقطة F

– لدينا في المثلث ABC المستقيم (PE) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(\Delta)=(AB)$

ويقطع $(D)=(AC)$ في النقطة E

إذن النقطة E هي منتصف القطعة $[AC]$

ومنه المستقيم (BE) هو متوسط المثلث ABC (1)

– لدينا في المثلث ABC المستقيم (PF) يمر من P منتصف القطعة $[BC]$ ويوازي $(D)=(AC)$

ويقطع $(\Delta)=(AB)$ في النقطة F

إذن النقطة F هي منتصف القطعة $[AB]$

ومنه المستقيم (CF) هو متوسط المثلث ABC (2)

من 1 و 2 نستنتج أن النقطة G هي مركز ثقل المثلث ABC

وبالتالي المستقيم (PG) هو المتوسط الموافق للضلع $[BC]$ المار من النقطة A

تمرين 3

1- لدينا :

$$\frac{xy}{x+y}-\frac{x+y}{4}=\frac{4xy-(x+y)^2}{4(x+y)}=\frac{4xy-x^2-2xy-y^2}{4(x+y)}=\frac{2xy-x^2-y^2}{4(x+y)}=\frac{-(x-y)^2}{4(x+y)}\geq 0$$

إذن : $\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}$

2- حسب السؤال 1 لدينا : $\begin{cases}\frac{xy}{x+y}\leq\frac{x+y}{4}\\ \frac{zy}{z+y}\leq\frac{z+y}{4}\\ \frac{xz}{x+z}\leq\frac{x+z}{4}\end{cases}$ يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{x+y}{4}+\frac{x+z}{4}+\frac{z+y}{4}$

يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{2x+2y+2z}{4}$ يكافئ : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{2(x+y+z)}{4}$

إذن : $\frac{xy}{x+y}+\frac{xz}{x+z}+\frac{zy}{z+y}\leq\frac{x+y+z}{2}$

<u>تمرين 4</u>

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في F

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $EG^2=EF^2+FG^2$

لنحدد إشارة الفرق $(EF+FG)^2-(\sqrt{2}EG)^2$:

$$\begin{aligned}(EF+FG)^2-(\sqrt{2}EG)^2&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EG^2\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EG^2\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2(EF^2+FG^2)\\&=EF^2+FG^2+2EF\times FG-2EF^2-2FG^2\\&=2EF\times FGG-EF^2-FG^2\\&=-(EF^2-2EF\times FG+FG^2)\\&=-(EF-FG)^2\leq 0\end{aligned}$$

إذن : $(EF+FG)^2\leq(\sqrt{2}EG)^2$

ومنه : $EF+FG\leq\sqrt{2}EG$