أولمبياد السادس والعشرون

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان موجبان قطعا

بين أن : $3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geq 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

تمرين 2

a و b و x و y أعداد حقيقية موجبة قطعا بحيث : $x\leq y$

بين أن : $\frac{x}{y}\leq\frac{ax+by}{ay+bx}\leq\frac{y}{x}$

تمرين 3

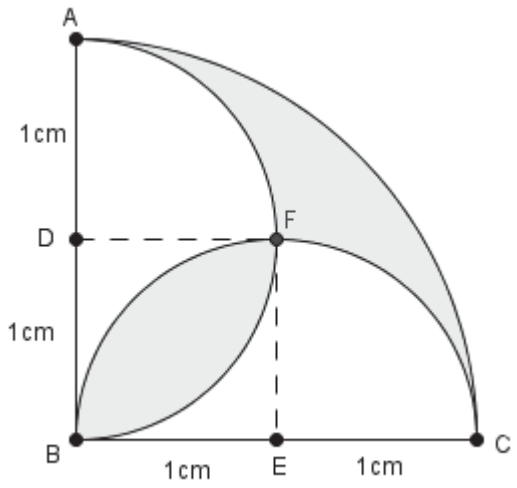
1- x و y عددان حقيقيان موجبان بحيث : $x-y=16$ 2 و $xy=224$

أحسب $x+y$

2- احسب : $S=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130}+\frac{1}{208}+\frac{1}{304}+\frac{1}{418}+\frac{1}{550}+\frac{1}{700}$

تمرين 4

احسب مساحة المنطقة المضللة



حل أولمبياد السادس والعشرون

تمرين 1

لدينا :

$$3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$$
$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+1$$
$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)^2\geq 0$$

إذن : $3+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geq 2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$

تمرين 2

لدينا : $x\leq y$

يعني : $x^2\leq y^2$

يعني : $(bx)\times x^2\leq (bx)\times y^2$ و $(ay)\times x^2\leq (ay)\times y^2$ ($bx>0$ و $ay>0$)

يعني : $bx^3\leq bxy^2$ و $ayx^2\leq ay^3$

يعني : $bx^3+(ax^2y)\leq bxy^2+(ax^2y)$ و $ayx^2+(bxy^2)\leq ay^3+(bxy^2)$

يعني : $x^2(bx+ay)\leq xy(by+ax)$ و $xy(ax+by)\leq y^2(ay+bx)$

يعني : $\frac{1}{x^2}\times x^2(bx+ay)\leq \frac{1}{x^2}\times xy(by+ax)$ و $\frac{1}{y^2}\times xy(ax+by)\leq \frac{1}{y^2}\times y^2(ay+bx)$

يعني : $bx+ay\leq \frac{y}{x}\times(by+ax)$ و $\frac{x}{y}\times(ax+by)\leq (ay+bx)$

يعني : $\frac{1}{bx+ay}\geq \frac{x}{y}\times\left(\frac{1}{by+ax}\right)$ و $\frac{y}{x}\times\left(\frac{1}{ax+by}\right)\geq \frac{1}{ay+bx}$

يعني : $\frac{ax+by}{bx+ay}\geq \frac{x}{y}$ و $\frac{y}{x}\geq \frac{ax+by}{ay+bx}$

وبالتالي : $\frac{x}{y}\leq \frac{ax+by}{ay+bx}\leq \frac{y}{x}$

تمرين 3

1- لدينا : $x-y=16\sqrt{2}$

يعني : $(x-y)^2=\left(16\sqrt{2}\right)^2$

إذن : $x^2-2xy+y^2=256\times 2=512$ (1)

لدينا : $xy=224$

إذن: $4\times xy=4\times 224=896$ (2)

نجمع المساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $x^2-2xy+y^2+4\times xy=512+896$

أي : $x^2+2xy+y^2=1408$

أي : $(x+y)^2=1408$

وبالتالي : $x+y=\sqrt{1408}=2\sqrt{352}$

2-

$$S=\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\frac{1}{10\times 13}+\frac{1}{13\times 16}+\frac{1}{16\times 19}+\frac{1}{19\times 22}+\frac{1}{22\times 25}+\frac{1}{25\times 28}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{4-1}{1\times 4}+\frac{1}{3}\times\frac{7-4}{4\times 7}+\frac{1}{3}\times\frac{10-7}{7\times 10}+\frac{1}{3}\times\frac{13-10}{10\times 13}+\frac{1}{3}\times\frac{16-13}{13\times 16}+\frac{1}{3}\times\frac{19-16}{16\times 19}+\frac{1}{3}\times\frac{22-19}{19\times 22}+\frac{1}{3}\times\frac{25-22}{22\times 25}+\frac{1}{3}\times\frac{28-25}{25\times 28}$$

$$=\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{13}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{19}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{22}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{22}-\frac{1}{25}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{28}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{22}+\frac{1}{22}-\frac{1}{25}+\frac{1}{25}-\frac{1}{28}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{28}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{27}{28}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{9\times 3}{28}$$

$$=\frac{9}{28}$$

تمرين 4

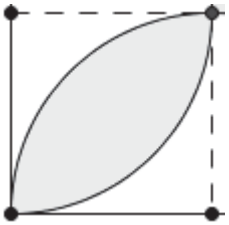
- مساحة الشكل : $\frac{\pi\times 2^2}{4}=\pi$

- مساحة نصف الدائرة التي قطرها يساوي 2 : $\frac{\pi\times 1^2}{2}=\frac{\pi}{2}$

– مساحة نصف الدائرتين التي قطراهما يساويان 2 : $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\not{2}\pi}{\not{2}}=\pi$

– مساحة الشكل البيضاوي :

$$1^2-2\left(1^2-\frac{\pi\times1^2}{4}\right)=1-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=1-\frac{4-\pi}{2}$$
$$=\frac{\pi-2}{2}$$



– مساحة المنطقة المضللة :

مساحة المنطقة المضللة = مساحة الشكل– (مساحة نصف الدائرتين – مساحة الشكل البيضاوي)

$$\not{\pi}-\left(\not{\pi}-\frac{\pi-2}{2}\right)=\frac{2-\pi}{2}\ cm^2$$

مساحة المنطقة المضللة هي : $\frac{2-\pi}{2}\ cm^2$

اسطيط عبدالرحيم