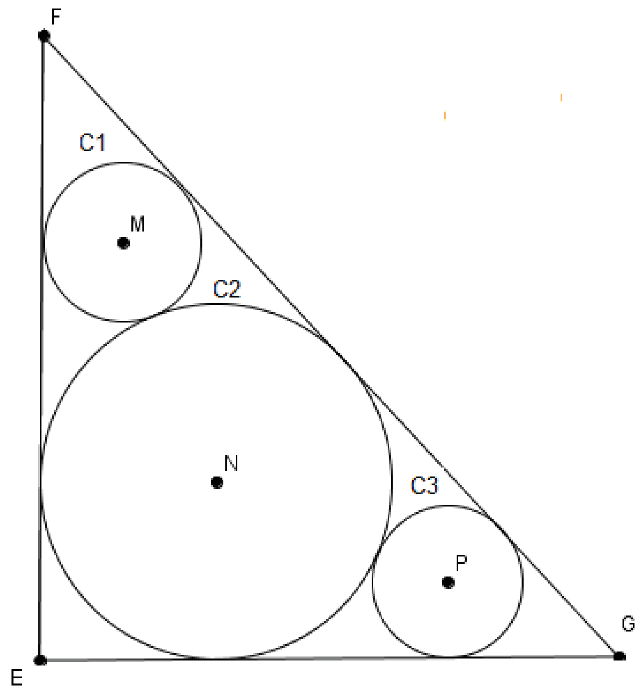
أولمبياد الثامن عشر

تمرين 1

x و y و z إعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$

بين أن : $\frac{x^2-y^2+z^2}{x^{-2}-y^{-2}-z^{-2}}=y^4$

تمرين 2



EFG مثلث بحيث : $EF=8cm$ و$EG=6cm$

و $FG=10cm$

(C_1) و (C_2) و (C_3) ثلاث دوائر توجد داخل المثلث EFG كما هو مبين في الشكل جانبه

مركزهما على التوالي: M و N و P

1- حدد شعاع الدائرة (C_2)

2- حدد شعاع الدائرة (C_1)

تمرين 3

x و y و z إعداد حقيقية موجبة غير منعدمة

بين أن : $\frac{x}{y+z}+\frac{z}{x+y}+\frac{y}{x+z}\geq\frac{3}{2}$

تمرين 4

x و y عددان حقيقيان بحيث : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

بين أن : $x+y=0$

حل أولمبياد الثامن عشر

تمرين 1

نضع : $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=t$

بما أن : $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}=t$ فإن : $y=xt$ و $z=yt$

أي : $y=xt$ و $z=xt^2$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{x^2-y^2+z^2}{x^{-2}-y^{-2}-z^{-2}} &= \frac{x^2-(xt)^2+(xt^2)^2}{x^{-2}-(xt)^{-2}-(xt^2)^{-2}}\\ &= \frac{x^2-x^2t^2+x^2t^4}{x^{-2}-x^{-2}t^{-2}-x^{-2}t^{-4}}\\ &= \frac{x^2(1-t^2+t^4)}{x^{-2}(1-t^{-2}-t^{-4})}\\ &= x^2x^2\frac{1-t^2+t^4}{1-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}}\\ &= x^4\frac{t^4-t^2+1}{\frac{t^4-t^2+1}{t^4}}\\ &= x^4t^4\frac{t^4-t^2+1}{t^4-t^2+1}\\ &= (xt)^4 = y^4\end{aligned}$$

إذن : $\frac{x^2-y^2+z^2}{x^{-2}-y^{-2}-z^{-2}}=y^4$

تمرين 2

1- حساب مساحة الدائرة (C_2) :

بما أن (EF) مماس للدائرة (C_2) في النقطة D

فإن $(EF)\perp(DN)$

أي المثلث DNF قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

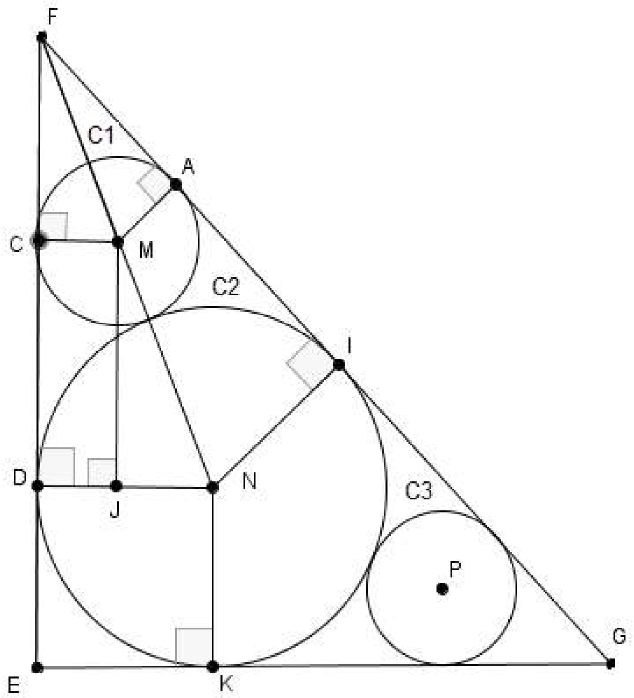
إذن : $FN^2 = FD^2 + DN^2$

ومنه $FD^2 = FN^2 - DN^2$ (1)

بما أن (GF) مماس للدائرة (C_2) في النقطة I

فإن $(GF) \perp (IN)$

أي المثلث INF قائم الزاوية في I



حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة

إذن : $FN^2 = FI^2 + IN^2$

ومنه $FI^2 = FN^2 - IN^2$ (2)

ونعلم أن $DN = IN$ (3)

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن $FD^2 = FI^2$

أي : $FI = FD$

إذن : $FI = 8 - DE$ (4)

وبنفس الطريقة نبين أن : $GI = 6 - EK$ (5)

لدينا : $FG^2 = 10^2 = 100$

و $EF^2 + EG^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

حسب مبرهنة فيتاغورس العكسية فإن المثلث EFG قائم الزاوية في E ومنه $\hat{E} = 90^\circ$

لدينا $D\hat{N}K = 360 - E\hat{D}N - E\hat{K}N - \hat{E} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $D\hat{N}K = \hat{E} = E\hat{D}N = E\hat{K}N = 90^\circ$ و $DN = IN$ فإن الرباعي $DNKE$ مربع

ومنه : $DE = EK$ (6)

من 5 و 6 نستنتج أن : $GI = 6 - DE$ (7)

ونعلم أن : $FG = FI + GI = 5$ (8)

من 4 و 7 و 8 نستنتج أن : $FI + GI = 8 - DE + 6 - DE = 10$

أي : $-2DE + 14 = 10$

أي : $-2DE = -4$

إذن : $DE=\frac{4}{2}=2$

2- حساب مساحة الدائرة (C_1) :

لدينا المثلث FND قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $FN^2=DF^2+DN^2$

أي : $FN^2=(FE-DE)^2+DN^2$

أي : $FN^2=(8-2)^2+2^2$

أي : $FN^2=36+4=40$

ومنه : $FN=2\sqrt{10}$

نعتبر النقطة J المسقط العمودي للنقطة M على (DN)

لدينا $C\hat{M}J=360-M\hat{J}D-J\hat{D}C-D\hat{C}M=360^\circ-90^\circ-90^\circ-90^\circ=90^\circ$

بما أن $C\hat{M}J=M\hat{J}D=J\hat{D}C=D\hat{C}M=90^\circ$ فإن الرباعي $CMJD$ مستطيل

ومنه : $CM=JD$

لدينا : $NJ=DN-DJ=2-CM$ و $MN=CM+2$

في المثلث FDN لدينا : $D\hat{F}N+F\hat{D}N+F\hat{N}D=180^\circ$

يعني : $D\hat{F}N=180^\circ-F\hat{D}N-F\hat{N}D$

إذن : $D\hat{F}N=180^\circ-90^\circ-F\hat{N}D=90^\circ-F\hat{N}D$ (9)

في المثلث MNJ لدينا : $N\hat{M}J+M\hat{J}N+M\hat{N}J=180^\circ$

يعني : $N\hat{M}J=180^\circ-M\hat{J}N-M\hat{N}J$

إذن : $N\hat{M}J=180^\circ-90^\circ-F\hat{N}D=90^\circ-F\hat{N}D$ (10)

من 9 و 10 نستنتج أن : $D\hat{F}N=N\hat{M}J$

أي : $\sin D\hat{F}N=\sin N\hat{M}J$

اي : $\frac{DN}{FN}=\frac{NJ}{NM}$

أي : $\frac{2}{2\sqrt{10}}=\frac{2-CM}{CM+2}$

أي : $2CM+4=4\sqrt{10}-2\sqrt{10}CM$

أي : $2CM + 2\sqrt{10}CM = 4\sqrt{10} - 4$

أي : $2CM\left(1+\sqrt{10}\right) = 2\left(2\sqrt{10}-2\right)$

إذن : $CM = \dfrac{2\sqrt{10}-2}{1+\sqrt{10}}$

تمرين 3

لدينا : $\left(\dfrac{x+y}{y+z}-1\right)^2 \geq 0$

يعني : $\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2 - 2\dfrac{x+y}{y+z} + 1 \geq 0$ يعني : $\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2 + 1 \geq 2\dfrac{x+y}{y+z}$

يعني : $\dfrac{1}{\dfrac{x+y}{y+z}} \times \left(\left(\dfrac{x+y}{y+z}\right)^2 + 1\right) \geq \dfrac{1}{\dfrac{x+y}{y+z}} \times 2\dfrac{x+y}{y+z}$

يعني : $\dfrac{x+y}{y+z} + \dfrac{1}{\dfrac{x+y}{y+z}} \geq \dfrac{1}{\cancel{\dfrac{x+y}{y+z}}} \times 2\cancel{\dfrac{x+y}{y+z}}$

إذن : $\dfrac{x+y}{y+z} + \dfrac{y+z}{x+y} \geq 2$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\dfrac{x+z}{y+z} + \dfrac{y+z}{x+z} \geq 2$ (2)

و $\dfrac{x+y}{x+z} + \dfrac{x+z}{x+y} \geq 2$ (3)

نجمع المتفاوتات 1 و 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{x+y}{y+z} + \frac{y+z}{x+y} + \frac{x+z}{y+z} + \frac{y+z}{x+z} + \frac{x+y}{x+z} + \frac{x+z}{x+y} \geq 2+2+2$$

أي : $\left(\dfrac{x+y}{y+z} + \dfrac{x+z}{y+z}\right) + \left(\dfrac{y+z}{x+y} + \dfrac{x+z}{x+y}\right) + \left(\dfrac{y+z}{x+z} + \dfrac{x+y}{x+z}\right) \geq 2+2+2$

أي : $\dfrac{2x+y+z}{y+z} + \dfrac{2z+x+y}{x+y} + \dfrac{2y+x+z}{x+z} \geq 6$

أي : $\dfrac{2x}{y+z} + \dfrac{y+z}{y+z} + \dfrac{2z}{x+y} + \dfrac{x+y}{x+y} + \dfrac{2y}{x+z} + \dfrac{x+z}{x+z} \geq 6$

أي : $\dfrac{2x}{y+z} + 1 + \dfrac{2z}{x+y} + 1 + \dfrac{2y}{x+z} + 1 \geq 6$ أي : $\dfrac{2x}{y+z} + \dfrac{2z}{x+y} + \dfrac{2y}{x+z} + 3 \geq 6$

أي : $2\left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{z}{x+y} + \dfrac{y}{x+z}\right) \geq 6-3$ أي : $\dfrac{1}{2} \times 2\left(\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{z}{x+y} + \dfrac{y}{x+z}\right) \geq \dfrac{1}{2} \times 3$

وبالتالي : $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{z}{x+y} + \dfrac{y}{x+z} \geq \dfrac{3}{2}$

تمرين 4

لدينا : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\dfrac{x^2-\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\dfrac{\cancel{x^2}-\cancel{x^2}-1}{x-\sqrt{x^2+1}}\times\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\dfrac{-\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)}{x-\sqrt{x^2+1}}=1$

يعني : $-y-\sqrt{y^2+1}=x-\sqrt{x^2+1}$

إذن : $x+y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{y^2+1} \quad (1)$

لدينا : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

يعني : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\times\dfrac{y-\sqrt{y^2+1}}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\dfrac{y^2-\left(\sqrt{y^2+1}\right)^2}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\times\dfrac{\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-1}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $\dfrac{-\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{y-\sqrt{y^2+1}}=1$

يعني : $-x-\sqrt{x^2+1}=y-\sqrt{y^2+1}$

إذن : $x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1} \quad (2)$

نجمع المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $2(x+y)=\cancel{\sqrt{x^2+1}}-\cancel{\sqrt{y^2+1}}+\cancel{\sqrt{y^2+1}}-\cancel{\sqrt{x^2+1}}$

أي : $2(x+y)=0$

وبالتالي : $x+y=0$