أولمبياد الثامن

تمرين 1

x و y عددان موجبان قطعا

بين أن : $\frac{x+y}{xy+x+1} \leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$

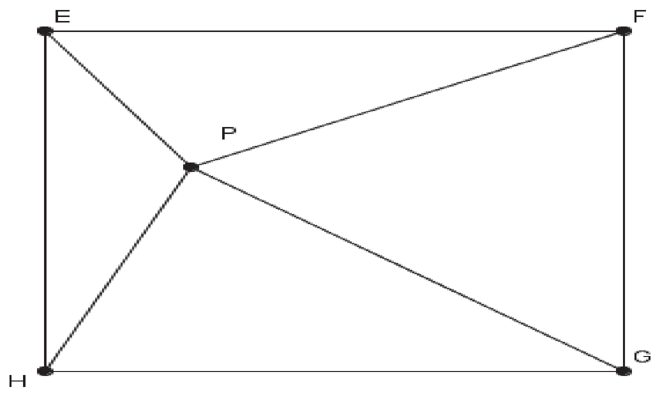
تمرين 2

$EFGH$ مربع

و النقطة P توجد في داخله

كماهو مبين في الشكل جانبه

بين أن : $GP^2 + EP^2 = HP^2 + FP^2$



تمرين 3

x و y عددين حقيقيين مختلفين غير منعدمين بحيث : $(x-y)(3x-2y) = xy$

احسب $\frac{x+y}{x-y}$

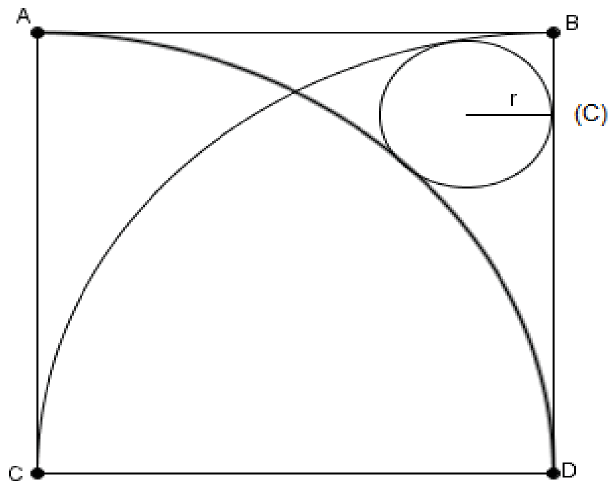
تمرين 4

نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$ABDC$ مربع و $BD = 6cm$ و r هو

شعاع الدائرة (C)

بين أن : $r = 1cm$



حل أولمبياد الثامن

تمرين 1

لدينا : $x>0$ و $y>0$

يعني : $x+y \geq x$ يعني : $x+y+1 \geq x+1$ يعني : $\frac{1}{x+y+1} \leq \frac{1}{x+1}$

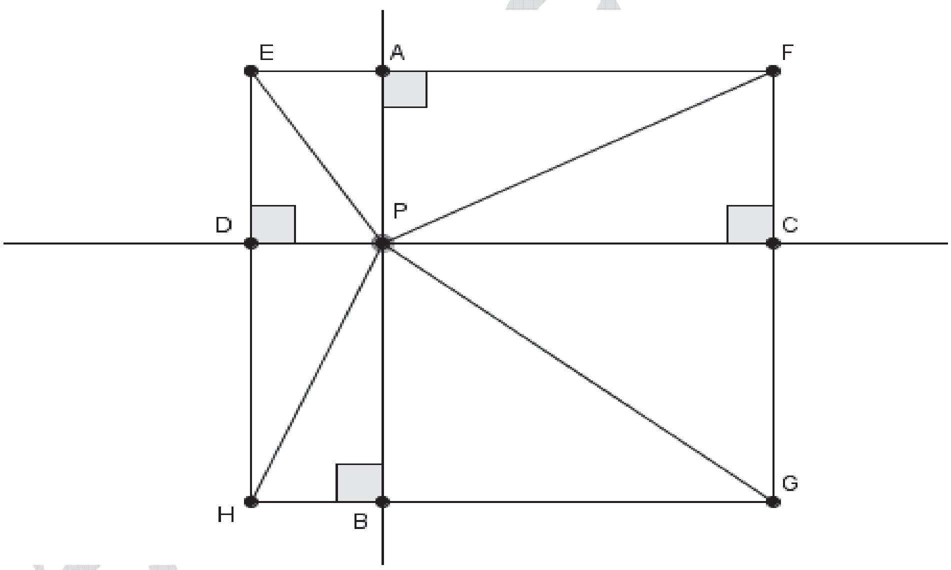
إذن : $\frac{x}{x+y+1} \leq \frac{x}{x+1}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{y+x+1} \leq \frac{y}{y+1}$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $\frac{x}{x+y+1} + \frac{y}{y+x+1} \leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$

وبالتالي : $\frac{x+y}{x+y+1} \leq \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1}$

تمرين 2



تعتبر النقطة A المسقط العمودي للنقطة P على $[EF]$

و النقطة C المسقط العمودي للنقطة P على $[FG]$

و النقطة B المسقط العمودي للنقطة P على $[GH]$

و النقطة D المسقط العمودي للنقطة P على $[EH]$

نطبق مبرهنة فيثاغورس على المثلثات AEP و AFP و PCG و PHB :

$$\begin{cases} EP^2 = AP^2 + AE^2 = AP^2 + DP^2 \\ PG^2 = PC^2 + CG^2 = PC^2 + PB^2 \\ PF^2 = AP^2 + AF^2 = AP^2 + PC^2 \\ PH^2 = PB^2 + HB^2 = PB^2 + DP^2 \end{cases} \quad (AE = DP \text{ و } CG = PB \text{ و } AF = PC \text{ و } HB = DP)$$

إذن :

$$\begin{aligned} PG^2 + EP^2 &= PC^2 + PB^2 + AP^2 + DP^2 \\ &= PB^2 + DP^2 + AP^2 + PC^2 \\ &= PH^2 + PF^2 \end{aligned}$$

<u>تمرين 3</u>

لدينا : $(x-y)(3x-2y) = xy$ يعني: $3x^2 - 2xy - 3xy + 2y^2 - xy = 0$

يعني: $3x^2 - 6xy + 2y^2 = 0$ يعني: $3\left(x^2 - 2xy + \frac{2y^2}{3}\right) = 0$

يعني: $\left(x^2 - 2xy + y^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$ يعني: $\left((x-y)^2 - \frac{y^2}{3}\right) = 0$

يعني: $\left(x - y + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)\left(x - y - \frac{y}{\sqrt{3}}\right) = 0$

يعني : $x - y + \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$ و $x - y - \frac{y}{\sqrt{3}} = 0$

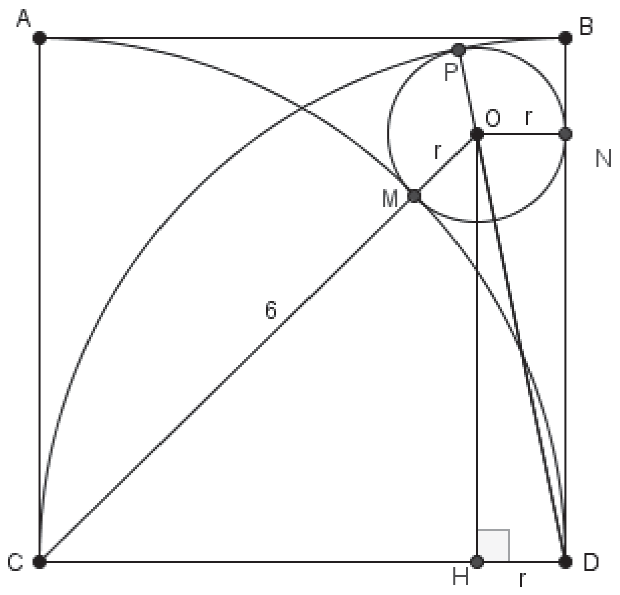
يعني : $x = y - \frac{y}{\sqrt{3}}$ و $x = y + \frac{y}{\sqrt{3}}$

إذن :

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y - \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y - \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y - \frac{y}{\sqrt{3}}}{-\frac{y}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3} - 1}{-1} = 1 - 2\sqrt{3}$$

أو

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{y + \frac{y}{\sqrt{3}} + y}{y + \frac{y}{\sqrt{3}} - y} = \frac{2y + \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{y}{\sqrt{3}}} = 1 + 2\sqrt{3}$$



تمرين 4

نعتبر النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على (CD)

إذن : $O\hat{H}D = 90^\circ$

بما أن (DN) مماسا للدائرة (C) في النقطة N

فإن: $(DN) \perp (ON)$ ومنه $D\hat{N}O = 90^\circ$

لدينا : $H\hat{O}N = 360 - D\hat{N}O - O\hat{H}D - H\hat{D}N$

يعني: $H\hat{O}N = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

بما أن $H\hat{O}N = D\hat{N}O = O\hat{H}D = H\hat{D}N = 90^\circ$

فإن الرباعي $ONDH$ مستطيل

ومنه : $OH = ND$

ونعلم أن : $CH = CD - HD$ و $CO = CM + MO$ و $DO = DP - PO$

يعني : $CH = 6 - r$ و $CO = 6 + r$ و $DO = 6 - r$

حساب OH :

لدينا المثلث OHC قائم الزاوية في H

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $CO^2 = CH^2 + OH^2$

اي : $OH^2 = CO^2 - CH^2$ أي : $OH^2 = (6+r)^2 - (6-r)^2$

أي : $OH^2 = \cancel{36} + 12r + \cancel{r^2} - \cancel{36} + 12r - \cancel{r^2}$ ومنه : $OH = \sqrt{24r}$

حساب r :

لدينا المثلث ODN قائم الزاوية في D

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $OD^2 = ON^2 + DN^2$

اي : $(6-r)^2 = r^2 + \left(\sqrt{24r}\right)^2$ $\quad$ $\left(OH = ND \text{ و } DO = 6 - r \right)$

أي : $36 - 12r + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 24r$ أي : $36r = 36$

وبالتالي : $r = 1$