

## أولمبياد الثالث

### تمرين 1

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً

$$\text{بين أن } \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq x + y + z$$

### تمرين 2

$AHB$  مثلث بحيث :  $\hat{ABH} = 120^\circ$

و  $[BC]$  هو منتصف الزاوية  $\hat{ABH}$  ( $C \in [HA]$ )

المستقيم المار من  $H$  والموازي للمستقيم  $(CB)$  يقطع المستقيم  $(AB)$  في النقطة  $D$ .

$$\text{بين أن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$$

### تمرين 3

$x$  و  $y$  و  $z$  أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث :  $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$$\text{بين أن : } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

### تمرين 4

$ABC$  مثلث و النقطة  $D$  منتصف  $[BC]$

و  $(AE)$  الإرتفاع الموافق للضلع  $[BC]$  ( $E \in (BC)$ )

و النقطتان  $F$  و  $G$  هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين  $B$  و  $C$  على  $(AD)$

$$\text{بين أن } CG = BF$$

## حل أولمبياد الثالث

### تمرين 1

لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية موجبة قطعاً بحيث:  $a = xy$  و  $b = yz$  و  $c = xz$

لدينا :  $(a-b)^2 \geq 0$  و  $(b-c)^2$  و  $(c-a)^2 \geq 0$

أي :  $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$  أي :  $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \geq 0$

أي :  $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac \geq 0$  أي :  $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ac)$

أي :  $\frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{1}{2\sqrt{abc}} \times 2(ab + bc + ac)$

أي :  $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \frac{ab}{\sqrt{abc}} + \frac{bc}{\sqrt{abc}} + \frac{ac}{\sqrt{abc}}$

أي :  $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \frac{\sqrt{a^2b^2}}{\sqrt{abc}} + \frac{\sqrt{b^2c^2}}{\sqrt{abc}} + \frac{\sqrt{a^2c^2}}{\sqrt{abc}}$

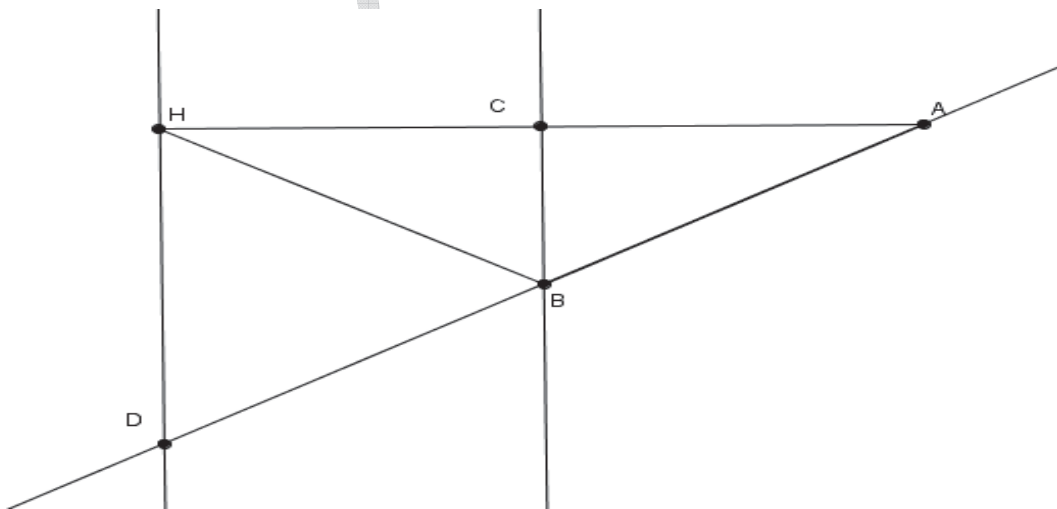
أي :  $\frac{a^2}{\sqrt{abc}} + \frac{b^2}{\sqrt{abc}} + \frac{c^2}{\sqrt{abc}} \geq \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}}$

أي :  $\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \frac{y^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} + \frac{x^2z^2}{\sqrt{x^2y^2z^2}} \geq \sqrt{\frac{xy^2z}{xz}} + \sqrt{\frac{yz^2x}{xy}} + \sqrt{\frac{x^2yz}{yz}}$

أي :  $\frac{x^2y^2}{xyz} + \frac{y^2z^2}{xyz} + \frac{x^2z^2}{xyz} \geq \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2} + \sqrt{x^2}$

وبالتالي :  $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{xz}{y} \geq y + z + x$

### تمرين 2



بما أن  $[BC]$  هو منصف الزاوية  $\widehat{ABH}$

$$\widehat{ABC} = \widehat{HBC} = \frac{\widehat{ABH}}{2} = \frac{120}{2} = 60 \text{ : فإن}$$

$$\widehat{DBA} = \widehat{HBD} + \widehat{ABH} \text{ ولدينا}$$

$$(1) \quad \widehat{HBD} = \widehat{DBA} - \widehat{ABH} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ إذن}$$

بما أن المستقيمان  $(CB)$  و  $(HD)$  متوازيان و  $(HB)$  قاطع لهما

$$(2) \quad \widehat{BHD} = \widehat{HBC} = 60^\circ \text{ فإن}$$

$$\widehat{HDB} + \widehat{DHB} + \widehat{HBD} = 180 \text{ ولدينا}$$

$$\widehat{HDB} = 180 - (\widehat{DHB} + \widehat{HBD}) \text{ أي}$$

$$(3) \quad \widehat{HDB} = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ ومنه}$$

من 1 و 2 و 3 نستنتج أن المثلث  $HDB$  متساوي الأضلاع

$$\text{ومنه } HD = HB = DB$$

لدينا  $(HD) \parallel (CB)$

$$\text{حسب مبرهنة طاليس المباشرة إذن : } \frac{AH}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{AD}{AB} = \frac{DH}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{AB + BD}{AB} = \frac{BH}{CB} \text{ ( } AD = AB + BD \text{ و } HD = HB = DB \text{ )}$$

$$\text{أي : } \frac{AB + BH}{AB \times BH} = \frac{1}{CB}$$

$$\text{أي : } \frac{\frac{AB}{AB \times BH} + \frac{BH}{AB \times BH}}{1} = \frac{1}{CB}$$

$$\text{وبالتالي : } \frac{1}{BH} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{CB}$$

### تمرين 3

$$\text{لدينا : } (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{أي : } (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

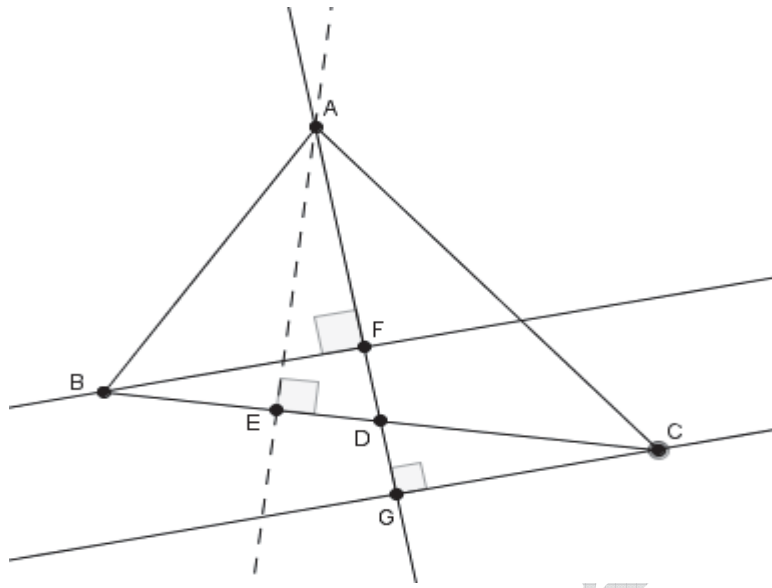
$$\text{أي : } x^2 + 2xy + y^2 + 2(x + y)z + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{أي : } 2xy + 2(x + y)z = 0 \text{ أي } 2(xy + xz + yz) = 0$$

$$\text{أي : } \frac{1}{xyz} \times (xy + xz + yz) = 0 \times \frac{1}{2xyz} \text{ أي } \frac{xy}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{yz}{xyz} = 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \quad \text{وبالتالي}$$

#### تمرين 4



نحسب مساحة المثلثين  $ABD$  و  $ACD$  بطريقتين مختلفتين

الطريقة الأولى :

$$\text{لدينا : } S_{ACD} = \frac{AE \times CD}{2} \text{ و } S_{ABD} = \frac{AE \times BD}{2}$$

(  $S_{ABD}$  هي مساحة المثلث  $ABD$  و  $S_{ACD}$  هي مساحة المثلث  $ACD$  )

نعلم أن  $BD = CD$

$$\text{إذن } S_{ABD} = S_{ACD}$$

الطريقة الثانية :

$$\text{لدينا : } S_{ACD} = \frac{AD \times CG}{2} \text{ و } S_{ABD} = \frac{AD \times BF}{2}$$

بما أن  $S_{ABD} = S_{ACD}$

$$\text{فإن : } \frac{AD \times BF}{2} = \frac{AD \times CG}{2}$$

$$\text{يعني : } \frac{\cancel{AD}}{\cancel{AD}} \times \frac{AD \times BF}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{AD}}{\cancel{AD}} \times \frac{AD \times CG}{\cancel{2}}$$

وبالتالي :  $BF = CG$