

أولمبياد الثاني والعشرون

تمرين 1

x عدد حقيقي بحيث : $x > 1$ و $x = \frac{\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}}{20}$

بين أن : $14x + 1 = x^2$

تمرين 2

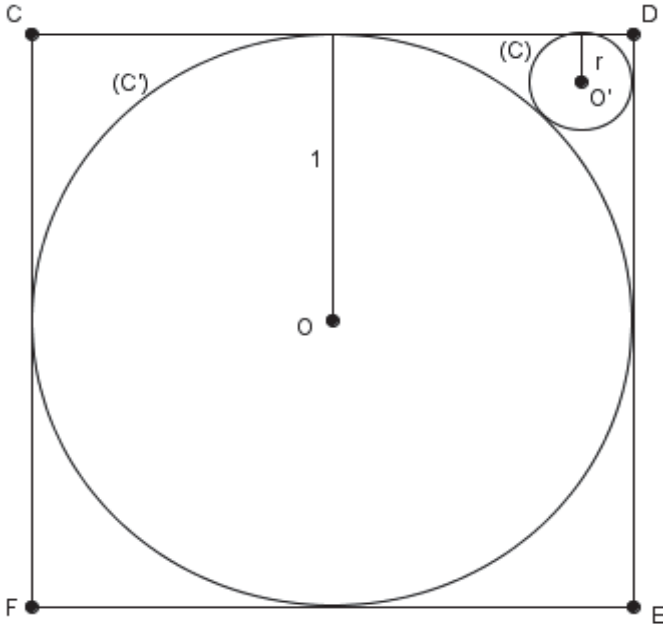
نعتبر الشكل جانبه بحيث :

$CDEF$ مربع طول ضلعه يساوي 2cm

(C') دائرة مركزها O شعاعها 1cm

(C) دائرة مركزها O' شعاعها r

بين أن $r = 3 - 2\sqrt{2}$



تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية بحيث : $x + y + z \neq 0$ و $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = 0$

بين أن : $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1$

تمرين 4

EFG مثلث قائم الزاوية في E

بين أن : $EF^3 + EG^3 < FG^3$

حل أولمبياد الثاني والعشرون

تمرين 1

لدينا : $x = \frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}}}{20}$: يعني $x^2 = \left(\frac{\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}}}{20} \right)^2$: يعني $x^2 = \frac{(\sqrt{2x^2 + \sqrt{2}})^2}{20^2}$

يعني : $x^2 = \frac{2x^4 + 4x^2 + 2}{400}$: يعني $x^2 = \frac{\cancel{2}(x^4 + 2x^2 + 1)}{\cancel{2} \times 200}$: يعني $200x^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

يعني : $196x^2 + 4x^2 = x^4 + 2x^2 + 1$: يعني $196x^2 = x^4 - 2x^2 + 1$

يعني : $(14x)^2 = (x^2 - 1)^2$: يعني $14x = x^2 - 1$

وبالتالي : $14x + 1 = x^2$

تمرين 2

لدينا : $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} = 0$

يعني : $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} + (x+y+z) = 0 + (x+y+z)$

يعني : $\left(\frac{x^2}{y+z} + x \right) + \left(\frac{y^2}{x+z} + y \right) + \left(\frac{z^2}{x+y} + z \right) = (x+y+z)$

يعني : $\frac{x^2 + x(y+z)}{y+z} + \frac{y^2 + y(x+z)}{x+z} + \frac{z^2 + z(x+y)}{x+y} = (x+y+z)$

يعني : $\frac{x(x+y+z)}{y+z} + \frac{y(x+y+z)}{x+z} + \frac{z(x+y+z)}{x+y} = (x+y+z)$

يعني : $(x+y+z) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \right) = (x+y+z)$

يعني : $\frac{1}{\cancel{x+y+z}} \times (\cancel{x+y+z}) \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \right) = \frac{1}{\cancel{x+y+z}} \times (\cancel{x+y+z})$

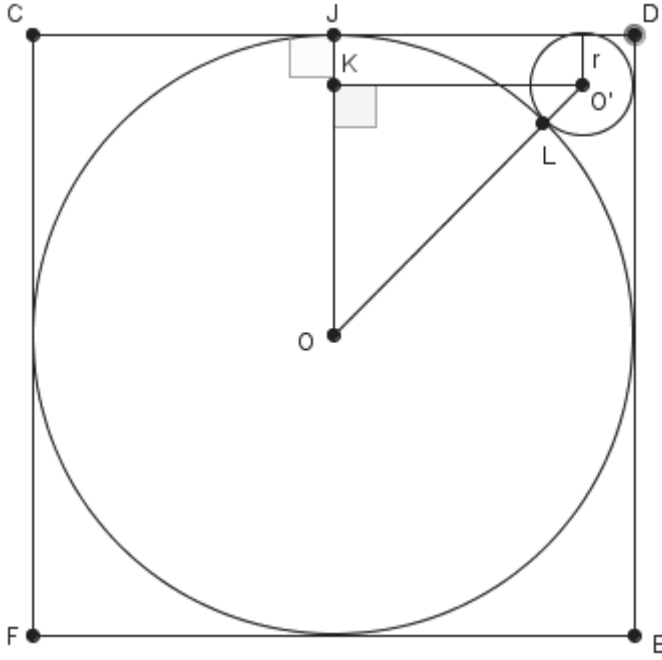
وبالتالي : $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = 1$

تمرين 3

لدينا : $OO' = OL + LO'$

و $OK = OJ - KJ$ و $KO' = JD - r$

إذن : $OO' = 1 + r$ و $OK = 1 - r$



و $KO' = 1 - r$

لدينا المثلث OKO' قائم الزاوية في K
حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن :

$$OO'^2 = OK^2 + O'K^2$$

أي : $(1+r)^2 = (1-r)^2 + (1-r)^2$

أي : $(1+r)^2 = 2(1-r)^2$

أي : $1+r = \sqrt{2(1-r)^2}$

أي : $1+r = \sqrt{2}(1-r)$ أي :

أي : $r + \sqrt{2}r = \sqrt{2} - 1$ أي : $r(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

اي :

$$r = \frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} \times \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{-(\sqrt{2}-1)^2}{1-2} = (\sqrt{2}-1)^2$$

وبالتالي : $r = 2 - 2\sqrt{2} + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$

تمرين 4

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2 + EG^2 = FG^2$

لنبين أن : $EF^3 + EG^3 - FG^3 < 0$

$$EF^3 + EG^3 - FG^3 = EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - FG^2 \times FG$$

$$= EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - (EF^2 + EG^2) \times FG$$

$$= EF^2 \times EF + EG^2 \times EG - EF^2 \times FG - EG^2 \times FG$$

$$= EF^2 \times (EF - FG) + EG^2 \times (EG - FG) < 0$$

(لأن $EF < FG$ و $EG < FG$)

وبالتالي : $EF^3 + EG^3 < FG^3$