

أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

x و y عدنان صحيحان طبيعيين متتابعان ($y > x$)
بين أن : $x^2 + y^2 + (xy)^2 = (x^2 + y)^2$

تمرين 2

x و y عدنان حقيقيان بحيث : $x > 1$ و $y > 1$
بين أن : $y \cdot x - 1 + x \cdot y - 1 \leq xy$

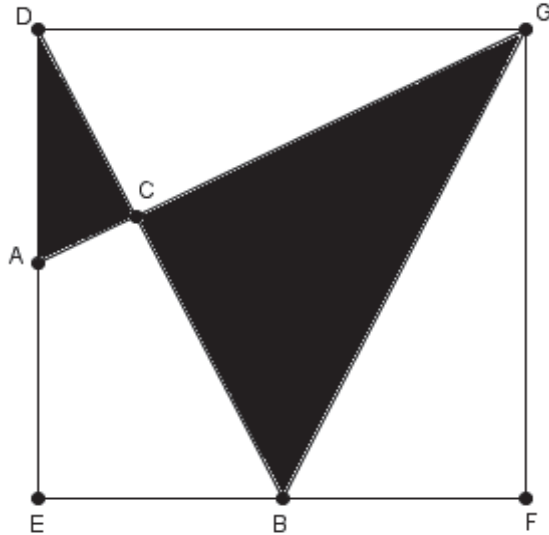
تمرين 3

نعتبر النقطتين A و O من المستوى



أنشئ النقطة H مماثلة A بالنسبة للنقطة O و النقطة F مماثلة O بالنسبة للنقطة A
بواسطة البركار فقط (تبرير الإنشاء)

تمرين 4



$DGFE$ مربع بحيث : $DG = 8cm$

النقطتان A و B هما على التوالي

منتصفا $[DE]$ و $[EF]$

احسب مساحة المنطقة المظللة

حل أولمبياد السابع عشر

تمرين 1

بما أن x و y عددان صحيحان طبيعيين متتابعان و $y > x$

فإن $y = x + 1$

لدينا :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + (xy)^2 &= x^2 + y^2 + (x(x+1))^2 = x^2 + y^2 + x^2(x+1)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^2(x^2 + 2x + 1) \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^3 + x^2 \\ &= x^4 + y^2 + 2x^2 + 2x^3 \\ &= x^4 + y^2 + 2x^2(1+x) \\ &= (x^2)^2 + y^2 + 2x^2y \end{aligned}$$

نعلم أن : $(x^2 + y)^2 = (x^2)^2 + y^2 + 2x^2y$

وبالتالي : $x^2 + y^2 + (xy)^2 = (x^2 + y)^2$

تمرين 2

بما أن $x > 1$ فإن $x - 1 > 0$

لدينا : $(\sqrt{x-1}-1)^2 \geq 0$

يعني : $(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1} + 1 \geq 0$ يعني : $x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 \geq 0$

يعني : $-2\sqrt{x-1} \geq -x$ يعني : $\frac{-1}{2} \times (-2\sqrt{x-1}) \leq \frac{-1}{2} \times (-x)$ يعني : $\sqrt{x-1} \leq \frac{x}{2}$

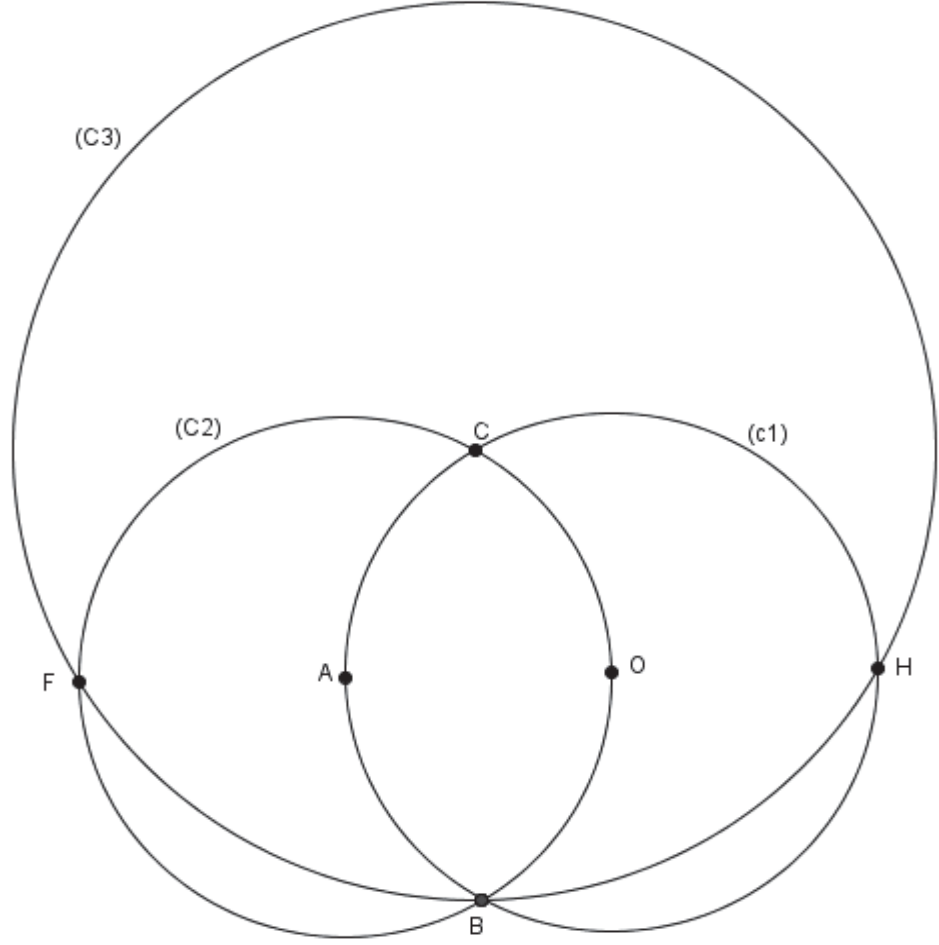
إذن : $y\sqrt{x-1} \leq \frac{xy}{2}$ (1)

وبنفس الطريقة نبين أن : $x\sqrt{y-1} \leq \frac{xy}{2}$ (2)

نجمع طرفي المتساويتان 1 و 2 طرف بطرف : $y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} \leq \frac{2xy}{2}$

وبالتالي : $y\sqrt{x-1} + x\sqrt{y-1} \leq xy$

تمرين 3



- نرسم الدائرة (C_1) التي مركزها O وشعاعها OA
- نرسم الدائرة (C_2) التي مركزها A وشعاعها OA
- الدائرتان (C_1) و (C_2) تتقاطعان في النقطتين B و C
- نرسم الدائرة (C_3) التي مركزها C وشعاعها CB
- الدائرة (C_3) تتقاطع مع (C_1) و (C_2) على التوالي في النقطتين H و F
- وبالتالي النقطة H هي ماثلة A بالنسبة للنقطة O
- و النقطة F هي ماثلة O بالنسبة للنقطة A

تمرين 4

حساب S_{ADC} مساحة المثلث ADC :

$$\left\{ \begin{array}{l} DG = DE \\ AD = EB \\ \hat{ADG} = \hat{DEB} \end{array} \right. \text{ لدينا : إذن المثلثان } DGA \text{ و } DEB \text{ متقايسان}$$

$$\hat{DAG} = \hat{DBE} \text{ أي}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{DAG} = \hat{DAC} = \hat{DBE} \\ \hat{ADC} = \hat{EDB} \end{array} \right. \text{ بما أن فإن المثلثان } DAC \text{ و } DEB \text{ متشابهان}$$

$$\text{ومنه } \hat{DCA} = \hat{DEB} = 90^\circ \text{ المثلث } DAC \text{ قائم الزاوية في } C \text{ إذن } (DC) \perp (AG)$$

باستعمال العلاقات المترية في المثلث DGA القائم الزاوية :

$$DA^2 = AC \times AG \text{ و } DC \times AG = DA \times DG$$

$$\text{أي : } AC = \frac{DA^2}{AG} \text{ و } DC = \frac{DA \times DG}{AG}$$

$$\text{لدينا } S_{ADC} = \frac{DC \times AC}{2} \text{ يعني : } S_{ADC} = \frac{\frac{DA \times DG}{AG} \times \frac{DA^2}{AG}}{2} \text{ يعني : } S_{ADC} = \frac{DA^3 \times DG}{2AG^2}$$

$$\text{بما أن المثلث } ADG \text{ قائم الزاوية في } D \text{ فإن } AG^2 = AD^2 + DG^2$$

$$\text{أي : } S_{ADC} = \frac{DA^3 \times DG}{2(AD^2 + DG^2)} \text{ أي : } S_{ADC} = \frac{4^3 \times 8}{2(4^2 + 8^2)} \text{ أي : } S_{ADC} = \frac{64 \times 4}{2(16 + 64)}$$

$$\text{يعني : } S_{ADC} = \frac{512}{160} = 3.2$$

$$\text{حساب } S_{BCG} \text{ مساحة المثلث } BCG :$$

$$\text{لدينا : } S_{DAG} = S_{DAC} + S_{DCG} \text{ و } S_{DBG} = S_{BCG} + S_{DCG}$$

$$\text{نطرح المتساويتان طرف بطرف : } S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} + S_{DCG} - S_{BCG} - S_{DCG}$$

$$\text{أي : } S_{DAG} - S_{DBG} = S_{DAC} - S_{BCG} \text{ أي : } S_{BCG} = S_{DAC} + S_{DBG} - S_{DAG}$$

$$\text{أي : } S_{BCG} = 5 + \frac{DE \times DG}{2} - \frac{DA \times DG}{2} \text{ أي : } S_{BCG} = 5 + \frac{8 \times 8}{2} - \frac{4 \times 8}{2}$$

$$\text{أي : } S_{BCG} = 5 + 32 - 16 = 21 \text{ إذن : } S_{BCG} = 21$$

حساب مساحة المنطقة المظللة :

$$\text{مساحة المنطقة المظللة} = \text{مساحة المثلث } ADC + \text{مساحة المثلث } BCG$$

$$S_{ADC} + S_{BCG} = 3.2 + 21 = 24.2$$