أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

x و y عددين حقيقيين موجبين

بين أن $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 \leq \frac{x^3+y^3}{2}$

تمرين 2

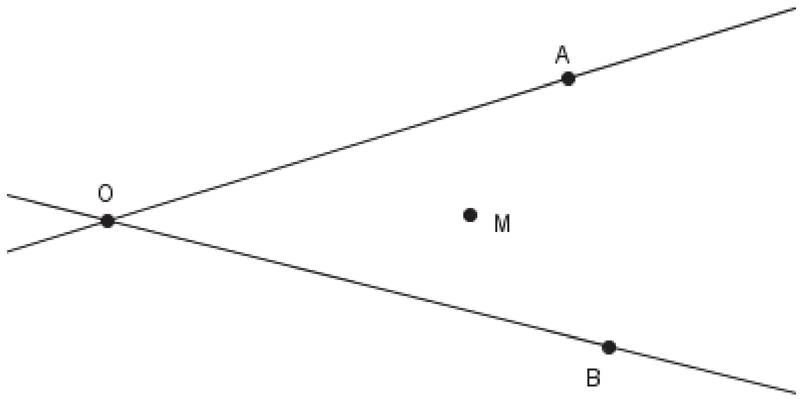
نعتبر الشكل جانبه :

حدد نقطتين O' و N من

المستقيمين (OA) و (OB) على

التوالي بحيث تكون النقطة M

منتصف $[NO']$



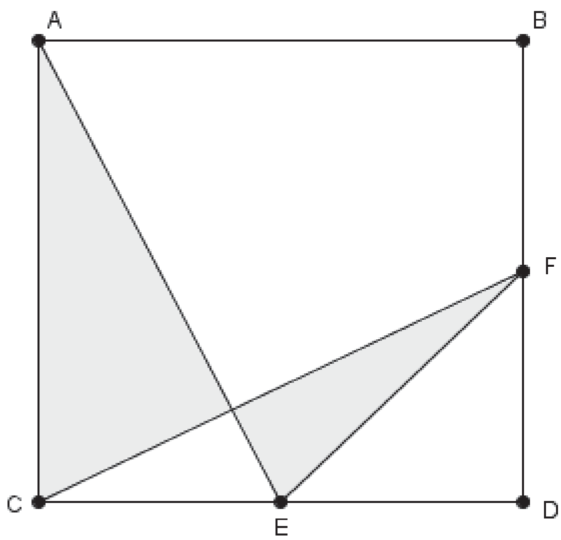
تمرين 3

x و y و z أعداد حقيقية غير منعدمة بحيث : $xy+yz+zx=0$

بين أن : $\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}=-3$

تمرين 4

احسب S مساحة المنطقة المضللة



حل أولمبياد الرابع عشر

تمرين 1

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3-\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)^3}{2^3}-\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{(x+y)^2(x+y)}{2^3}-\frac{4\left(x^3+y^3\right)}{4\times 2}$$

$$=\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{8}-\frac{4x^3+4y^3}{8}$$

$$=\frac{-3x^3+3x^2y+3xy^2-3y^3}{8}$$

$$=\frac{-3\left(x^3-x^2y-xy^2+y^3\right)}{8}$$

$$=\frac{-3\left(x^2(x-y)-y^2(x-y)\right)}{8}$$

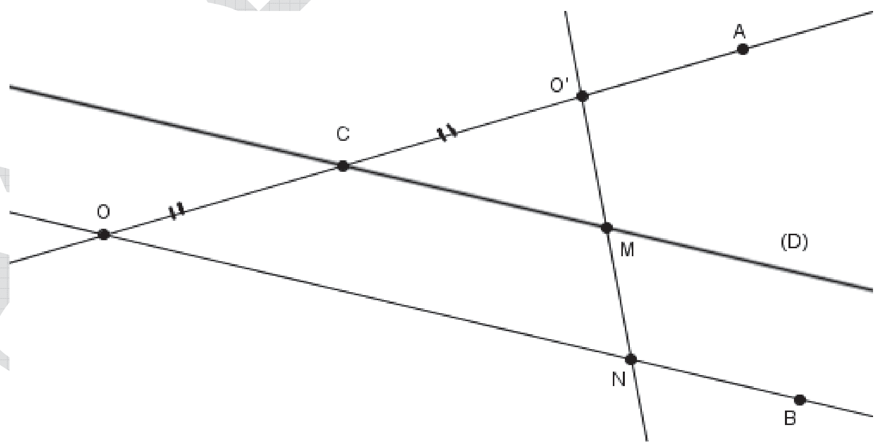
$$=\frac{-3(x-y)\left(x^2-y^2\right)}{8}$$

$$=\frac{-3(x-y)(x-y)(x+y)}{8}$$

$$=\frac{-3(x-y)^2(x+y)}{8}\leq 0$$

(لأن $(x-y)^2\geq 0$ و $x+y\geq 0$)

تمرين 2



المرحلة الأولى :

ننشئ المستقيم (D) الموازي للمستقيم (OB) ويقطع المستقيم (OA) في النقطة C

المرحلة الثانية :

ننشئ النقطة O' مماثلة النقطة O بالنسبة للنقطة C

المرحلة الثالثة :

ننشئ النقطة N تقاطع المستقيمين $(O'M)$ و (OB)

لدينا في المثلث $O'ON$ الستقيم المستقيم (D) يمر من C منتصف القطعة $[OO']$ ويوازي (ON) ويقطع $[NO']$ في النقطة M

إذن النقطة M هي منتصف القطعة $[NO']$

تمرين 3

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{z}+\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y} &= \frac{xy(x+y)+yz(y+z)+xz(z+x)}{xyz}\\
&= \frac{xy(x+y)+xyz-xyz+yz(y+z)+xyz-xyz+xz(z+x)+xyz-xyz}{xyz}\\
&= \frac{xy(x+y+z)-xyz+yz(y+z+x)-xyz+xz(z+x+y)-xyz}{xyz}\\
&= \frac{xy\times 0-xyz+yz\times 0-xyz+xz\times 0-xyz}{xyz}\\
&= \frac{-xyz-xyz-xyz}{xyz}\\
&= \frac{-3\cancel{xyz}}{\cancel{xyz}}\\
&= -3
\end{aligned}$$

تمرين 4

لدينا المثلث ACE قائم الزاوية في C

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة إذن : $AE^2 = AC^2 + CE^2$

ومنه : $AE^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$

أي : $AE = \sqrt{5}$

و لدينا : $\begin{cases} AC = DC \\ CE = DF \\ A\hat{C}E = F\hat{D}C \end{cases}$

إذن المثلثان ACE و FDC متقايسان

ومنه : $C\hat{A}E = F\hat{C}D$ و $AE = CF = \sqrt{5}$

لدينا : $H\hat{C}E + H\hat{E}C = C\hat{A}E + H\hat{E}C = 180^\circ - A\hat{C}E = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

إذن : $C\hat{H}E = 180^\circ - \left(H\hat{C}E + H\hat{E}C\right) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ومنه المثلثان AHC و FHE قائما الزاوية في H

أي : $S = \dfrac{AH \times CH}{2} + \dfrac{EH \times FH}{2}$ (S مساحة المنطقة المضللة)

حساب AH و CH و EH و FH :

لدينا : $\sin C\hat{A}E = \dfrac{CE}{AE} = \dfrac{CH}{AC}$

و $\cos C\hat{A}E = \dfrac{CA}{AE} = \dfrac{AH}{AC}$

و $\sin F\hat{C}D = \dfrac{FD}{FC} = \dfrac{EH}{EC}$

يعني : $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{CH}{2}$

و $\dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{AH}{2}$

و $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{EH}{1}$

إذن : $CH = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

و $AH = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

و $EH = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

لدينا : $FH = FC - CH = \sqrt{5} - \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$

وبالتالي :

$$S = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}}{2} + \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{3}{\sqrt{5}}}{2}$$
$$= \frac{4}{5} + \frac{3}{10}$$
$$= \frac{11}{10}$$