

أولمبياد الرابع

تمرين 1

x و y عدنان حقيقيان موجبان قطعاً

$$\text{بين أن } \frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$$

تمرين 2

ABC مثلث والنقط D و E و F هي على التوالي

منتصفات القطع $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$

$$\text{بين أن : } \frac{AB + AC + BC}{2} < AD + CE + BF < AB + AC + BC$$

تمرين 3

EFG مثلث قائم الزاوية في E

$$\text{بين أن : } EF^4 + EG^4 < FG^4$$

تمرين 4

$$\text{بين أن : } \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015} < \frac{1}{\sqrt{2016}}$$

حل أولمبياد الرابع

تمرين 1

لدينا : $(x^2 + y)^2 \geq 0$

أي : $x^4 - 2x^2y + y^2 \geq 0$ أي : $x^4 + y^2 \geq 2x^2y$ أي : $\frac{1}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2x^2y}$ أي : $\frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{x}{2x^2y}$

إذن : $\frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ (1)

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2yx}$ (2)

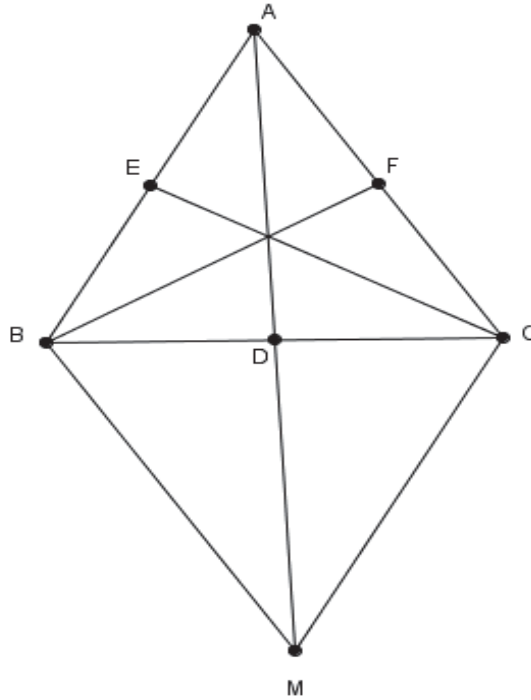
نجمع المتفاوتات 1 و 2 طرف بطرف : $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2xy} + \frac{1}{2yx}$

ومنه : $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$

وبالتالي : $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$

تمرين 2

لتكن M ممائلة A بالنسبة للنقطة D



لدينا D منتصف $[BC]$

إذن C هي ممائلة B بالنسبة للنقطة D

بما أن C و M هما ممائلتا A و B على التوالي بالنسبة للنقطة D

فإن : $AB = CM$ (1)

في المثلث ACM لدينا : $AM < AC + CM$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $AM < AC + AB$

نعلم أن $AM = 2AD$ (لأن M ممائلة A بالنسبة للنقطة D يعني D منتصف $[AM]$)

أي $2AD < AC + AB$ (3)

في المثلثان ADB و ADC لدينا : $AC < AD + DC$ (4)

و $AB < AD + DB$ (5)

نجمع المتفاوتتين 4 و 5 طرف بطرف : $AC + AB < AD + DC + AD + DB$

نعلم أن : $BC = BD + DC$

أي : $AC + AB < 2AD + BC$

إذن : $AC + AB - BC < 2AD$ (6)

من 3 و 6 نستنتج أن : $AC + AB - BC < 2AD < AC + AB$ (7)

بنفس الطريقة نبين أن : $AC + BC - AB < 2CE < AC + BC$ (8)

و $AB + BC - AC < 2BF < AB + BC$ (9)

نجمع المتفاوتات 7 و 8 و 9 طرف بطرف :

$AC + AB - BC + AC + BC - AB + AB + BC - AC < 2AD + 2CE + 2BF < AC + AB + AC + BC + AB + BC$
أي :

$$AC + \cancel{AB} - \cancel{BC} + \cancel{AC} + \cancel{BC} - \cancel{AB} + AB + BC - \cancel{AC} < 2(AD + CE + BF) < 2AC + 2AB + 2BC$$

أي : $\frac{1}{2} \times (AB + AC + BC) < \frac{1}{2} \times 2(AD + CE + BF) < \frac{1}{2} \times 2(AC + AB + BC)$

وبالتالي : $\frac{AB + AC + BC}{2} < AD + CE + BF < AB + AC + BC$

تمرين 3

لدينا EFG مثلث قائم الزاوية في E

إذن : $EF^2 + EG^2 = FG^2$

لنحدد إشارة الفرق : $(EF^4 + EG^4) - FG^4$

$$\begin{aligned} FG^4 - EF^4 - EG^4 &= (FG^2)^2 - EF^4 - EG^4 = (EF^2 + EG^2)^2 - EF^4 - EG^4 \\ &= (EF^2)^2 + 2EF^2 \times EG^2 + (EG^2)^2 - EF^4 - EG^4 \\ &= \cancel{EF^4} + 2EF^2 \times EG^2 + \cancel{EG^4} - \cancel{EF^4} - \cancel{EG^4} \\ &= 2EF^2 \times EG^2 > 0 \end{aligned}$$

وبالتالي : $EF^4 + EG^4 < FG^4$

تمرين 4

نضع : $Y = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2013}{2014} \times \frac{2015}{2016}$ و $X = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015}$

لدينا :

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$$

⋮

$$\frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}$$

$$\frac{2014}{2015} < \frac{2015}{2016}$$

يعني : $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015} < \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \dots \times \frac{2013}{2014} \times \frac{2015}{2016}$

يعني : $X < Y$

يعني : $X^2 < XY$

يعني : $\sqrt{X^2} = X < \sqrt{XY}$

لنحسب : $\sqrt{XY}$

لدينا : $XY = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \times \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{\cancel{6}} \times \frac{\cancel{6}}{\cancel{7}} \times \dots \times \frac{\cancel{2012}}{\cancel{2013}} \times \frac{\cancel{2013}}{\cancel{2014}} \times \frac{\cancel{2014}}{\cancel{2015}} \times \frac{\cancel{2015}}{2016} = \frac{1}{2016}$

إذن : $\sqrt{XY} = \sqrt{\frac{1}{2016}} = \frac{1}{\sqrt{2016}}$

وبالتالي : $X = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \dots \times \frac{2012}{2013} \times \frac{2014}{2015} < \sqrt{XY} = \frac{1}{\sqrt{2016}}$