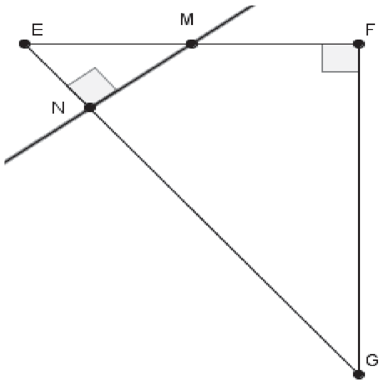
أولمبياد التاسع

تمرين 1

x و y عددان حقيقيان بحيث : $x>1$ و $y>1$

بين أن : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$

تمرين 2



EFG مثلث قائم الزاوية في F بحيث : $EF<FG$

النقطة M منتصف $[EF]$

النقطة N هي المسقط العمودي للنقطة

M على (EG)

بين أن : $GN^2-EN^2=FG^2$

تمرين 3

m عدد حقيقي موجب قطعا قطعا

1- بين أن $m+\frac{1}{m}\geq 2$

2- x و y و z و t أعداد حقيقية موجبة قطعا

بين أن : $(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq 16$

تمرين 4

$ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصفا $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

في المثلث AMD الإرتفاع المار من D يقطع (AM) في E

بين أن : $CE=CD$

حل أولمبياد التاسع

تمرين 1

لدينا : $x>1$ و $y>1$

يعني : $x-1>0$ و $y-1>0$

نضع : $a=x-1$ و $b=y-1$

يعني : $x=a+1$ و $y=b+1$

إذن : $x^2=(a+1)^2$ و $y^2=(b+1)^2$

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}&=\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\\&=\frac{a^2+2a+1}{b}+\frac{b^2+2b+1}{a}\\&=\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

لدينا : $(a+b)^2\geq 0$

يعني : $a^2+2ab+b^2\geq 0$ يعني : $a^2+b^2\geq 2ab$

يعني : $\frac{1}{ab}\times(a^2+b^2)\geq\frac{1}{\cancel{ab}}\times 2\cancel{ab}$ يعني : $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$

إذن : $2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4$ $\quad(1)$

لدينا : $(a-1)^2\geq 0$

يعني : $a^2-2a+1\geq 0$ يعني : $a^2+1\geq 2a$ يعني : $\frac{1}{b}\times(a^2+1)\geq\frac{1}{b}\times 2a$

إذن : $\frac{a^2+1}{b}\geq\frac{2a}{b}$ $\quad(2)$

بنفس الطريقة نبين أن : $\frac{b^2+1}{a}\geq\frac{2b}{a}$ $\quad(3)$

نجمع المتفاوتتين 2 و 3 طرف بطرف :

$$\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}$$

أي : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$

ومنه : $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geq 2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ (4)

من 1 و 4 نستنتج أن : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}=\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}+2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 4+4$

وبالتالي : $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}\geq 8$

تمرين 2

لدينا المثلثان MEN و MNG قائما الزاوية

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $ME^2=MN^2+EN^2$ و $MG^2=MN^2+GN^2$

ومنه : $EN^2=ME^2-MN^2$ و $GN^2=MG^2-MN^2$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-MN^2-\left(ME^2-MN^2\right)$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-ME^2$

ومنه : $GN^2-EN^2=MG^2-MF^2$ (1)

($ME=MF$ لأن النقطة M منتصف $[EF]$)

لدينا المثلثان MGF قائم الزاوية

حسب مبرهنة فيتاغورس المباشرة إذن : $MG^2=MF^2+FG^2$

ومنه : $FG^2=MG^2-MF^2$ (2)

من 1 و 2 نستنتج أن : $GN^2-EN^2=FG^2$

تمرين 3

1- لدينا : $m+\frac{1}{m}-2=\frac{m^2+1}{m}-2=\frac{m^2+1-2m}{m}=\frac{(m-1)^2}{m}\geq 0$ إذن : $m+\frac{1}{m}\geq 2$

2- لدينا :

$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{t}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{y}{t}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)+4$$

حسب السؤال 1 لدينا : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$ و $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$ و $\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\geq 2$

و $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$ و $\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\geq 2$ و $\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\geq 2$

إذن :

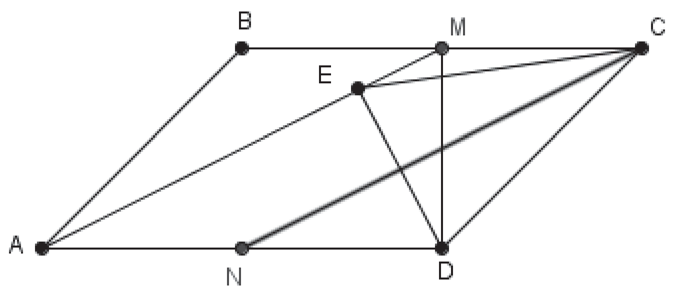
$$(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{x}{t}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{y}{t}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}+\frac{t}{y}+\frac{t}{z}+1$$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{t}+\frac{t}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{t}+\frac{t}{y}\right)+\left(\frac{z}{t}+\frac{t}{z}\right)+4$$

$$\geq 2+2+2+2+2+2+4$$

وبالتالي : $\boxed{(x+y+z+t)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}\right)\geq 16}$

تمرين 4



لدينا $ABCD$ متوازي الأضلاع و M و N منتصفا $[BC]$ و $[AD]$ على التوالي

إذن : $(MC)//(AN)$ و $MC=AN$

ومنه : الرباعي $ANCM$ متوازي الأضلاع

ومنه : $(AM)//(NC)$

ومنه : $(CN)\perp(DE)$ (1) (لأن $(AM)\perp(DE)$)

في المثلث ADE لدينا N منتصف $[AD]$ و $(CN)//(AE)$

إذن (CN) يمر من منتصف (DE) (2)

من 1 و 2 نستنتج أن (CN) هو واسط القطعة $[DE]$

وبالتالي : $CE=CD$